

CAPITOLO 2

AMPLIFICATORI OPERAZIONALI

2.1. Introduzione. Il principio del cortocircuito virtuale.

Si definiscono *operazionali* gli amplificatori specificamente progettati per lavorare in condizioni di desensibilizzazione totale. Può capitare di incontrare amplificatori adatti per l'impiego in schemi di retroazione di transimpedenza. In tal caso all'ingresso del ramo diretto si vede una tensione, all'uscita una corrente, e la funzione di trasferimento che conviene associare all'amplificatore ha le dimensioni di un'ammettenza. Si parla in effetti, in tal caso, di *operazionale a transconduttanza o OTA (operational transconductance amplifier)*.

Se l'amplificatore va invece inserito in uno schema di retroazione di transammettenza, la sua funzione di trasferimento avrà le dimensioni di un'impedenza, e si parlerà di *operazionale a transimpedenza*.

La categoria di amplificatori operazionali maggiormente diffusa è quella degli *amplificatori operazionali di tensione*, spesso impiegati in circuiti del tipo di fig.1.42). Nel seguito faremo pertanto riferimento solo ad operazionali di questo tipo. È peraltro abbastanza ovvio come estendere i risultati agli altri tipi di operazionali.

Gli amplificatori operazionali (di tensione) in commercio presentano solitamente 5 morsetti di collegamento: due, V^+ e V^- per l'ingresso, differenziale, due, V_S^+ e V_S^- , per l'alimentazione ed uno, V_u , per l'uscita. Sono a volte presenti altri morsetti per la cancellazione dell'offset e per la stabilizzazione del circuito. Negli schemi circuitali vengono solitamente indicati con un triangolo, come in fig. 2.1). Non è esplicitamente disponibile alcun morsetto di massa rispetto

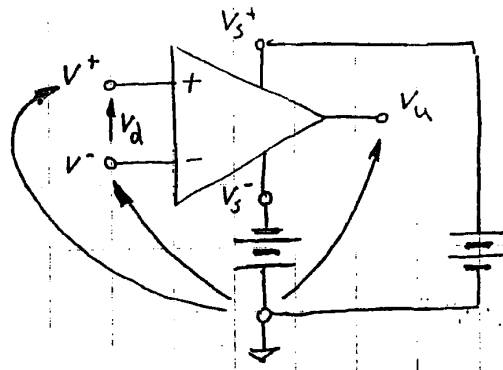


FIGURA 2.1. Un amplificatore operazionale.

al quale misurare le tensioni; si può assumere come riferimento di massa il punto intermedio tra le due batterie V_S^+ e V_S^- che alimentano l'amplificatore.

Nei circuiti alle variazioni (non necessariamente piccole) i due morsetti di alimentazione sono cortocircuitati tra di loro e a massa, e si può fare riferimento alla rappresentazione di fig. 2.2a). Spesso poi nella pratica si omette l'indicazione del collegamento di massa. Supponiamo, per semplicità, che l'amplificatore sia unilaterale, con matrice ibrida

$$h_a = \begin{bmatrix} h_i & 0 \\ h_f & h_o \end{bmatrix}.$$

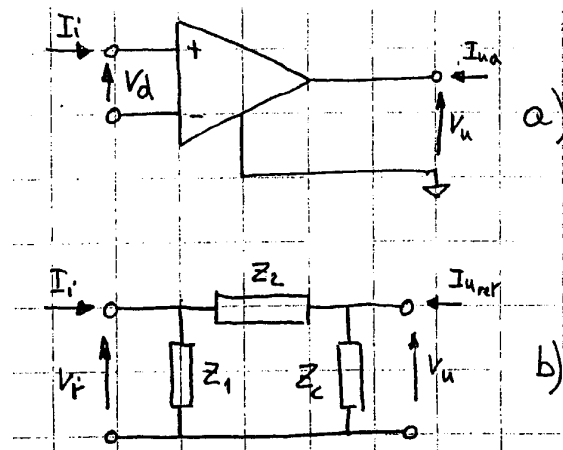


FIGURA 2.2. a) Rappresentazione alle variazioni di un amplificatore operazionale; b) 2-porte di retroazione.

Consideriamo poi il 2-porte di retroazione di fig. 2.2b), descritto dalla matrice ibrida

$$h_{ret} = \begin{bmatrix} \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} & \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \\ -\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} & \frac{1}{Z_1 + Z_2} + \frac{1}{Z_C} \end{bmatrix},$$

dove Z_1 e Z_2 determinano $h_{ret,r}$, mentre Z_C rappresenta l'eventuale carico. Collegando i due quadripoli di fig. 2.2) in serie ed in parallelo alle uscite si arriva al circuito di fig. 2.3), descritto dalla matrice

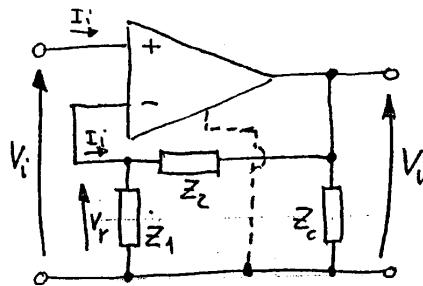


FIGURA 2.3. Collegamento serie/parallelo dei due porte per realizzare una retroazione di tensione.

$$h_{tot} = \begin{bmatrix} h_i + \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} & \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \\ h_f - \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} & h_o + \frac{1}{Z_1 + Z_2} + \frac{1}{Z_C} \end{bmatrix}.$$

Cerchiamo di capire che caratteristiche debba avere l'amplificatore del 2-porte diretto per comportarsi come un buon amplificatore operazionale di tensione. Secondo la rappresentazione retroazione di tensione

$$|H_d H_r| = \left| \frac{-h_{ftot} h_{rtot}}{h_{itot} h_{otot}} \right| = \left| \frac{-\left(h_f - \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}\right) \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}}{\left(h_i + \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}\right) \left(h_o + \frac{1}{Z_1 + Z_2} + \frac{1}{Z_C}\right)} \right|$$

mettendo in evidenza il guadagno di tensione a vuoto dell' amplificatore $A_0^v = -h_f/(h_i h_o)$ si trova:

$$|H_d H_r| = \left| \frac{-h_f}{h_i h_o} \right| \left| \frac{\left(1 - \frac{Z_1}{(Z_1+Z_2)h_f}\right) \frac{Z_1}{(Z_1+Z_2)}}{\left(1 + \frac{Z_1 Z_2}{(Z_1+Z_2)h_i}\right) \left(1 + \frac{1}{(Z_1+Z_2)h_o} + \frac{1}{Z_C h_o}\right)} \right| \quad (2.1)$$

Si noti, nella parentesi a numeratore, che

$$\frac{-Z_1}{(Z_1 + Z_2)h_f} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \frac{1}{Z_2} \left(-\frac{h_i h_o}{h_f}\right) \frac{1}{h_i h_o} = \frac{1}{A_0^v} \frac{\frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}}{h_i} \frac{1}{h_o Z_2} \quad (2.2)$$

Per avere desensibilizzazione totale occorre ovviamente che risulti $|H_d H_r| \gg 1$. Gli amplificatori operazionali di tensione vengono progettati in modo che risulti

$$\begin{aligned} |A_0^v| &\gg 1 \\ |h_o| &\gg \frac{1}{|Z_C|} \\ &\gg \frac{1}{|Z_1 + Z_2|} \\ &\gg \frac{1}{|Z_2|} \\ |h_i| &\gg \left| \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \right| \end{aligned} \quad (2.3)$$

in tutte le prevedibili situazioni di impiego. A parole, alto guadagno di tensione a vuoto, alta impedenza d' ingresso e bassa impedenza d' uscita. Se sono soddisfatte le equazioni 2.3, vista anche la 2.2, la 2.1 si riduce a

$$|H_d H_r| \simeq \left| A_0^v \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \right| \quad (2.4)$$

Se, nonostante la presenza del termine $Z_1/(Z_1 + Z_2)$, risulta $\left| A_0^v \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \right| \gg 1$, allora $V_u/V_i = H = H_r^{-1} = 1 + Z_2/Z_1$ (in sostanza, per avere desensibilizzazione totale, bisogna che il guadagno a vuoto dell' amplificatore sia molto maggiore del modulo del guadagno $1 + Z_2/Z_1$ che si vuol realizzare).

L' ipotesi su $|h_o|$ in 2.3 equivale ad affermare che la tensione all' uscita dell' amplificatore è circa uguale alla tensione che si misurerebbe a vuoto (effetto di carico trascurabile), mentre quella su $|h_i|$ equivale a ritenere trascurabile la corrente d' ingresso I_i dell' amplificatore, per cui la tensione V_r in fig. 2.3 può venir calcolata in base solamente a V_u . È quindi giustificato lo schema unifilare di fig. 2.4, al quale si fa comunemente riferimento quando si usano gli

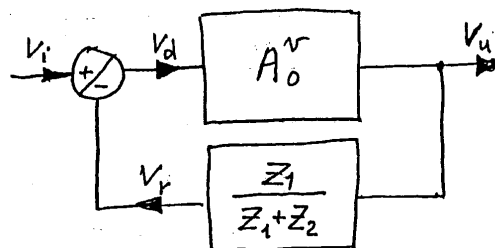


FIGURA 2.4. Rappresentazione unifilare dell' amplificatore della figura precedente.

amplificatori operazionali di tensione.

Se Z_1 e Z_2 sono resistenze, $V_u/V_i = 1 + R_2/R_1$. L'amplificatore così realizzato, illustrato in fig. 2.5, prende il nome di **amplificatore non invertente**.

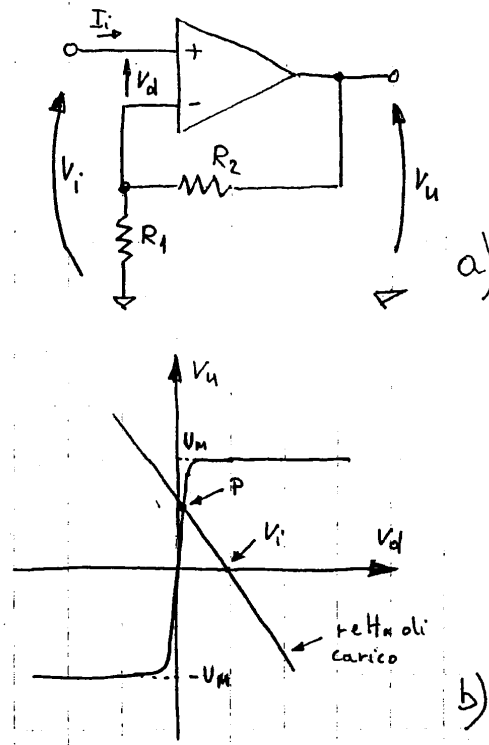


FIGURA 2.5. Amplificatore non invertente: a) schema, b) caratteristica di trasferimento e retta di carico.

Il circuito si presta bene ad illustrare il cosiddetto **principio del cortocircuito virtuale**, che consente di calcolare il guadagno di circuiti in retroazione relativamente complessi per semplice ispezione. La caratteristica a gradino in fig. 2.5b) illustra il legame tra la tensione di uscita dell'amplificatore, V_u , e la tensione differenziale d'ingresso V_d . Per $|V_d|$ abbastanza piccolo, la pendenza della caratteristica, cioè il guadagno di tensione in continua, è piuttosto elevata: valori tipici vanno da 10^4 a $10^6 V/V$. Poi, quando la tensione di uscita si avvicina a quella dell'alimentazione positiva o negativa, si ha la saturazione, che per semplicità supponiamo simmetrica a $\pm U_M$. La **retta di carico**, di equazione

$$V_d = V_i - \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_u \quad (2.5)$$

è ricavata dalla maglia di ingresso di fig. 2.5a) trascurando I_i . È immediato verificare che, fintanto che $|V_i| < U_M/(1 + R_2/R_1)$, l'intersezione P tra la retta e la caratteristica di trasferimento $V_u(V_d)$ casca nella regione ad elevato guadagno, e che l'ascissa di P, che rappresenta la tensione differenziale all'ingresso dell'amplificatore per quel valore di V_i , corrisponde ad una tensione molto minore di V_i (si ricordino i valori tipici del guadagno). Si può quindi ritenere, fintanto che $|V_i|$ non eccede il limite ricordato, che risulti con ottima approssimazione $V^+ \simeq V^-$, **cortocircuito virtuale**. Si noti che è virtuale, perchè non circola corrente essendo $I_i \simeq 0$.

Possiamo enunciare il **principio del cortocircuito virtuale** come segue: *in tutte le situazioni in cui l'uscita dell'amplificatore operazionale non satura, la tensione differenziale d'ingresso è molto più piccola di tutte le altre tensioni misurabili nel circuito e si può, rispetto ad esse, trascurare.*

Applicando il principio al circuito di fig. 2.5a), è immediato verificare che risulta $V_u/V_i = 1 + R_2/R_1$.

Occorre però qualche cautela nell' utilizzare il principio del cortocircuito virtuale. Innanzitutto, le considerazioni svolte sono essenzialmente di natura statica. Siccome normalmente il modulo del guadagno di tensione di un amplificatore operazionale cala al crescere della frequenza, è ragionevole aspettarsi che il guadagno calcolato applicando il principio del cortocircuito virtuale non sia attendibile per segnali d' ingresso ad alta frequenza. Per applicare il principio occorre infatti che il guadagno ad anello aperto di eq. 2.4 risulti molto elevato.

Si deve poi osservare che, scambiando i morsetti d' ingresso dell' amplificatore operazionale in fig. 2.5a), il principio del cortocircuito virtuale porterebbe al medesimo risultato, che però in questo caso sarebbe sbagliato. La retroazione sarebbe infatti positiva, ed il circuito cambierebbe completamente natura, come si vedrà parlando di multivibratori bistabili.

2.2. Applicazioni fondamentali.

Esaminiamo ora, con l' aiuto del principio del cortocircuito virtuale, alcune semplici applicazioni. Per il circuito di fig. 2.6) possiamo scrivere $V_i = Z_1 I_i - V_d \simeq Z_1 I_i$ e $V_u =$

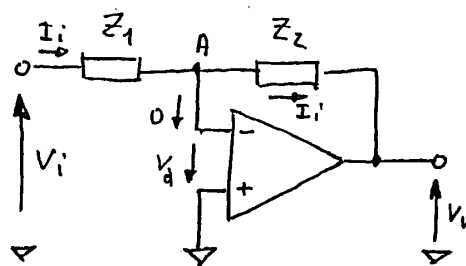


FIGURA 2.6. Schema che si presta alla realizzazione di un amplificatore invertente.

$-Z_2 I_i - V_d \simeq -Z_2 I_i$, ricordando che nel cortocircuito virtuale non passa corrente. Combinando le due equazioni

$$\frac{V_u}{V_i} = -\frac{Z_2}{Z_1}. \quad (2.6)$$

Nel caso in cui $Z_1 = R_1$ e $Z_2 = R_2$, risulta $V_u/V_i = -R_2/R_1$ ed il circuito di fig. 2.6) prende il nome di **amplificatore invertente**. Si noti che in tal caso è vera sia la relazione tra le trasformate $V_u(s) = -R_2/R_1 V_i(s)$ che la relazione fra le funzioni del tempo $V_u(t) = -R_2/R_1 V_i(t)$.

Si noti, confrontando la fig. 2.5a) con la fig. 2.6) nel caso $Z_1 = R_1$ e $Z_2 = R_2$, che l' amplificatore non invertente e quello invertente differiscono solo per il punto preso come riferimento di massa. Con riferimento alla fig. 2.6), la massa infatti coincide col morsetto non invertente dell' operazionale nel caso dell' amplificatore invertente, col terminale di R_1 opposto al nodo A nel caso dell' amplificatore non invertente. Non sorprende quindi che, dal punto di vista della stabilità, che va valutata in assenza del segnale d' ingresso ($V_i = 0$), il comportamento dei due circuiti sia sostanzialmente identico. (Ricordiamo che il punto scelto come massa viene solitamente collegato al punto comune delle due batterie che forniscono V_s^+ e V_s^-).

Merita infine dare, del circuito di fig. 2.6), una rappresentazione unifilare congruente con quella di fig. 2.4). Dalle equazioni:

$$-V_d = V_i \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} + V_u \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

$$V_u = A^v V_d,$$

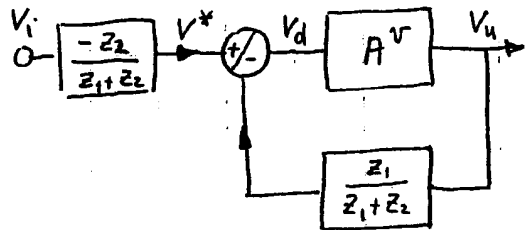


FIGURA 2.7. Rappresentazione unifilare dell' amplificatore invertente.

posto

$$V^* = -V_i \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

si ricava la rappresentazione di fig. 2.7), che a valle di V^* coincide con quella di fig. 2.4). Sempre allo schema di fig. 2.6) si possono ricondurre l' *integratore invertente* di fig. 2.8) ed il *derivatore invertente* di fig. 2.9). Per l' integratore risulta:

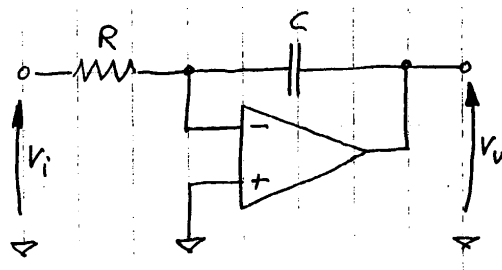


FIGURA 2.8. Integratore invertente.

$$\frac{V_u(s)}{V_i(s)} = -\frac{1}{sCR}$$

$$V_u(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t V_i(\tau) d\tau + V_u(0) .$$

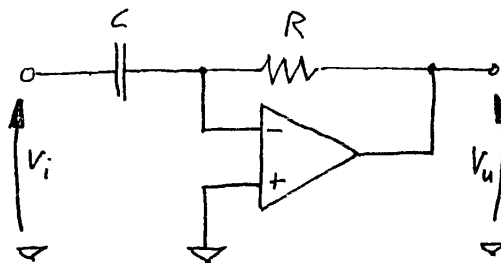


FIGURA 2.9. Derivatore invertente.

Per il derivatore

$$\frac{V_u(s)}{V_i(s)} = -sCR ,$$

$$V_u(t) = -RC \frac{dV_i}{dt} .$$

In fig. 2.10) è mostrato come combinare linearmente alcuni segnali, con qualche restrizione sui possibili valori dei coefficienti. Sovrapponendo gli effetti dei quattro generatori di tensione

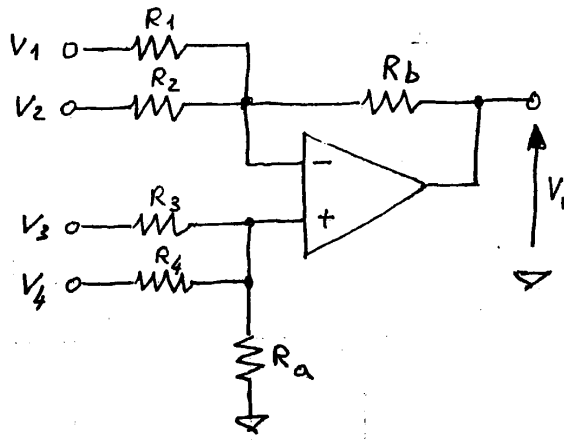


FIGURA 2.10. Realizzazione di una combinazione lineare a coefficienti reali di alcuni segnali.

indipendenti $V_1 \dots V_4$ (cosa lecita fintanto che l'operazionale si comporta come un amplificatore lineare) ed applicando il principio del cortocircuito virtuale in virtù del fatto che l'operazionale lavora in regime lineare

$$V_u = -\frac{R_b}{R_1}V_1 - \frac{R_b}{R_2}V_2 + \frac{R_4 \parallel R_a}{R_3 + R_4 \parallel R_a} \left(1 + \frac{R_b}{R_1 \parallel R_2}\right) V_3 + \frac{R_3 \parallel R_a}{R_4 + R_3 \parallel R_a} \left(1 + \frac{R_b}{R_1 \parallel R_2}\right) V_4.$$

Il circuito di fig. 2.11), in particolare, scegliendo $R_2/R_1 = R_4/R_3$, realizza un **amplificatore differenziale**:

$$V_u = \frac{R_2}{R_1}(V_2 - V_1).$$

Si sceglie comunemente $R_1 = R_3$ ed $R_2 = R_4$.

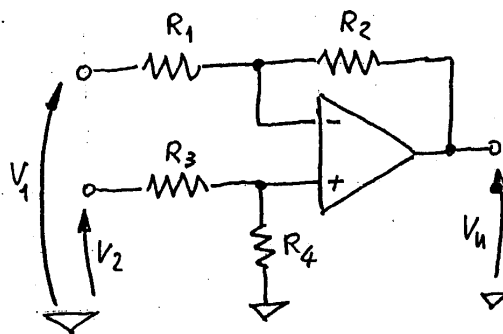


FIGURA 2.11. Amplificatore differenziale.

I circuiti visti finora consentono di realizzare sui segnali operazioni di tipo lineare. Sfruttando però la caratteristica esponenziale di una giunzione p-n polarizzata in diretta è possibile realizzare sui segnali operazioni algebriche non lineari. Il circuito di fig. 2.12), ad esempio, per $V_i > 0$ fornisce in uscita un segnale proporzionale al logaritmo del segnale d'ingresso. Se I_s è la corrente inversa di saturazione del diodo,

$$V_u = -V_T \ln \frac{V_i}{R I_s}, \quad V_i > 0,$$

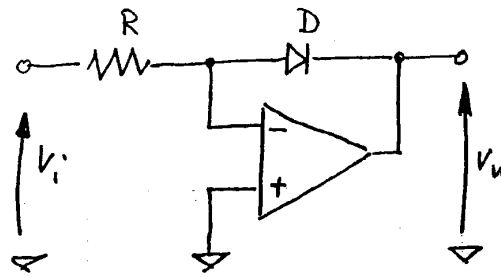


FIGURA 2.12. Amplificatore logaritmico.

essendo V_T la tensione termica kT/q .

Il circuito di fig. 2.13) realizza invece l'esponenziale del segnale d'ingresso:

$$V_u = -RI_s e^{\frac{V_i}{V_T}}, \quad V_i > 0.$$

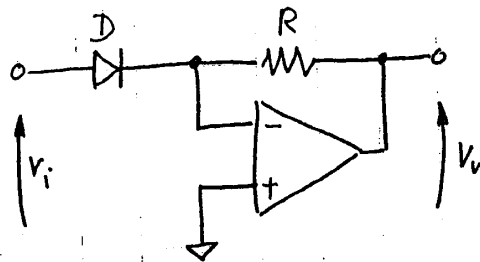


FIGURA 2.13. Amplificatore antilogaritmico o esponenziale.

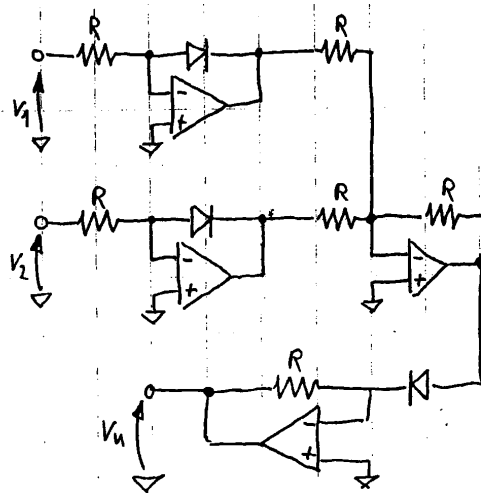


FIGURA 2.14. Moltiplicatore analogico.

Ricordando che il logaritmo del prodotto è la somma dei logaritmi dei fattori, è facile riconoscere nel circuito di fig. 2.14) un moltiplicatore. Supponendo che i diodi siano caratterizzati

dalla medesima I_s si trova:

$$V_u = -\frac{V_1 V_2}{R I_s}, \quad V_1 e V_2 > 0.$$

È ovvio generalizzare l'applicazione alla divisione ed all'elevamento a potenza di un segnale. Circuiti di questo genere sono alla base del *calcolo analogico*, e da questa applicazione trae origine il nome di amplificatori operazionali.

Gli amplificatori operazionali trovano poi applicazione nella realizzazione di circuiti raddrizzatori o rivelatori di cresta di precisione, nei quali viene eliminato l'effetto della caduta di tensione sul diodo polarizzato direttamente. Un *raddrizzatore a semplice semionda* è illustrato in fig. 2.15), insieme alle forme d'onda rilevanti. Per $V_i > 0$ la tensione sul morsetto invertente

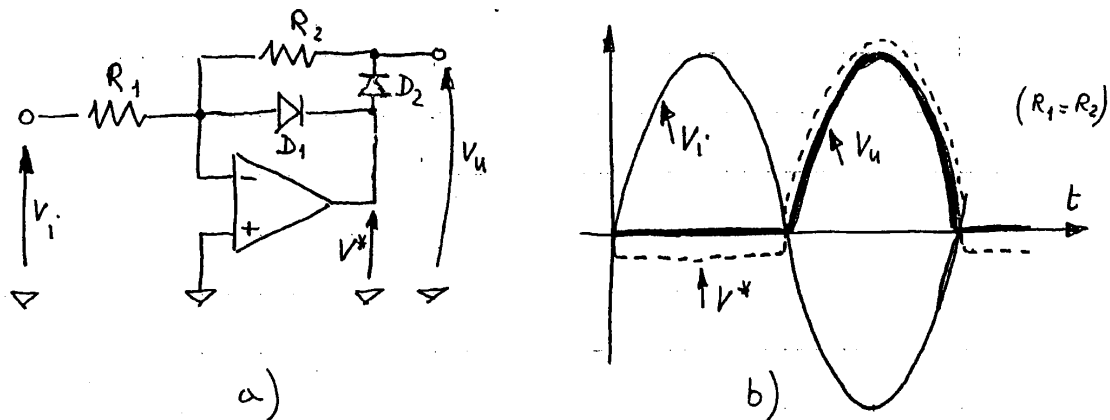


FIGURA 2.15. Raddrizzatore a semplice semionda.

tende a diventare > 0 (di pochissimo) e ciò basta a provocare l'accensione di D_1 grazie a V^* che tende a diventare negativa, fino a $-V_\gamma$. D_2 , con l'anodo a $-V_\gamma$ ed il catodo collegato a massa virtuale, è interdetto, quindi R_2 non è attraversata da corrente e l'uscita è al potenziale di massa virtuale. Per $V_i < 0$ V^- tende a diventare negativo, V^* a diventare positivo, D_2 si accende e D_1 si spegne. Essendo la stessa la corrente su R_1 ed R_2 ed uguali le resistenze si ricava la semionda positiva di V_u illustrata in fig. 2.15b).

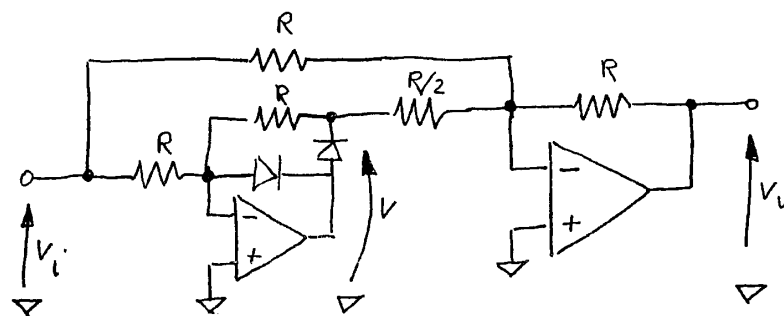


FIGURA 2.16. Raddrizzatore a doppia semionda.

Un *raddrizzatore a doppia semionda* è illustrato in fig. 2.16). Se $V_i > 0$, $V = 0$ e $V_u = -V_i$. Se $V_i < 0$, $V = -V_i$, $V_u = -V_i + 2V_i = V_i$. Segue che $V_u = -|V_i|$.

Un *rivelatore di cresta* potrebbe in linea di principio essere realizzato come in fig. 2.17a): non è però possibile in tal caso collegare alcun utilizzatore al circuito, a pena di scaricare il

condensatore di memorizzazione. Quando V_i cresce sopra V_u , D è acceso e la retroazione è chiusa: $V_u = V_i$. Se V_i scende, anche di poco, sotto V_u , per effetto dell' elevato guadagno V

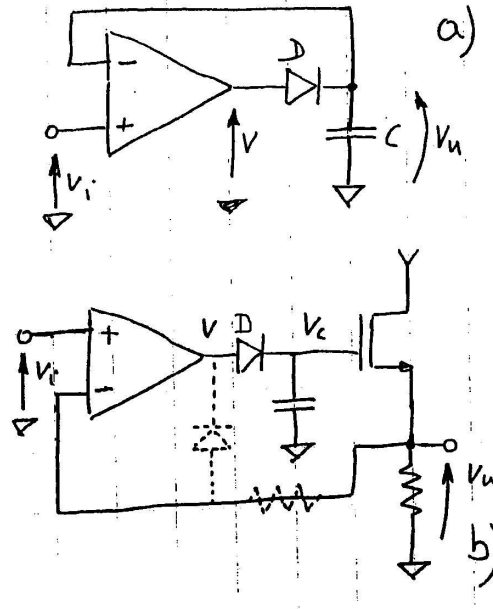


FIGURA 2.17. Rivelatore di cresta: a) schema di principio, b) uno schema più completo.

diventa molto negativo e D si spegne: V_u dunque ricorda il massimo valore raggiunto da V_i . Col circuito di fig. 2.17b) si può disaccoppiare il carico; tra V_c e V_u c'è una differenza pari alla tensione di accensione del transistor MOS. Con i componenti a tratteggio si impedisce a V di scendere molto sotto V_i quando, essendo interdetto il diodo D, verrebbe altrimenti ad aprirsi la retroazione. Questo per evitare un lungo transitorio in regime di "slew rate" alla riaccensione del diodo, quando V_i supera V_u .

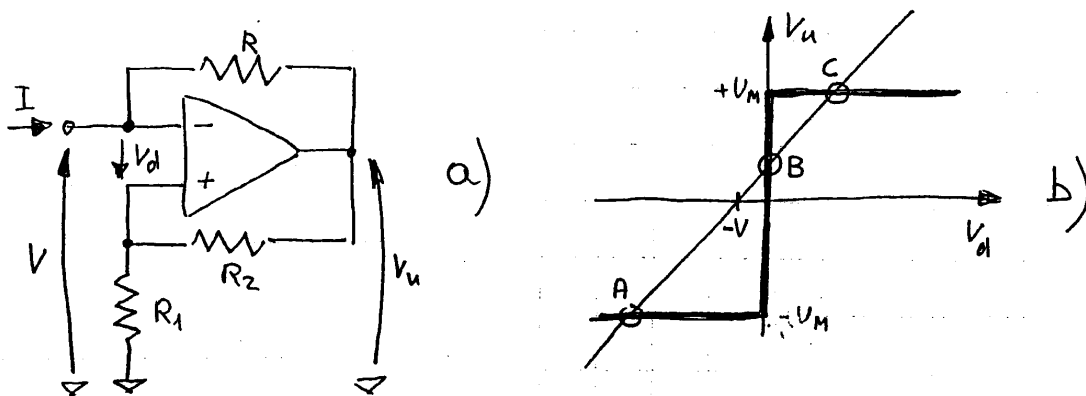


FIGURA 2.18. NIC I: a) circuito, b) caratteristica di trasferimento e retta di carico.

Un circuito molto interessante nelle applicazioni è il NIC (Negative Impedance Converter). Una prima realizzazione, basata sull' impiego di un operazionale, è illustrata in fig. 2.18a). In fig. 2.18b) è invece rappresentata la caratteristica di trasferimento $V_u - V_d$ dell' operazionale insieme con la retta di carico di equazione

$$V_d = V_u \frac{R_1}{R_1 + R_2} - V ,$$

che rappresenta il vincolo imposto a V_d , V e V_u dal circuito esterno. Le tre possibili soluzioni statiche del circuito corrispondono ai punti **A**, **B** e **C**. Esaminiamo i vincoli che nascono tra I e V nei tre casi.

- **A** $V_u = -U_M$; dal circuito si ricava $I = \frac{V+U_M}{R}$. Questa soluzione è valida se $V_d < 0$, che equivale a $-U_M \frac{R_1}{R_1+R_2} - V < 0$, cioè $V > -\frac{U_M R_1}{R_1+R_2}$.
- **B** $V_d = 0$ (cortocircuito virtuale). $V_u = V(1 + \frac{R_2}{R_1}) I = -\frac{R_2}{R_1 R} V$. Deve risultare $|V_u| < U_M$, e quindi $|V| < \frac{U_M R_1}{R_1+R_2}$.
- **C** $V_u = U_M$, valida se $V_d = \frac{U_M R_1}{R_1+R_2} - V > 0$, cioè se $V < \frac{U_M R_1}{R_1+R_2}$. Dal circuito: $I = \frac{V-U_M}{R}$.

L'insieme delle tre soluzioni porta ad individuare, tra I e V , il legame rappresentato in fig. 2.19): per ovvi motivi si parla di una caratteristica $I - V$ di tipo S.

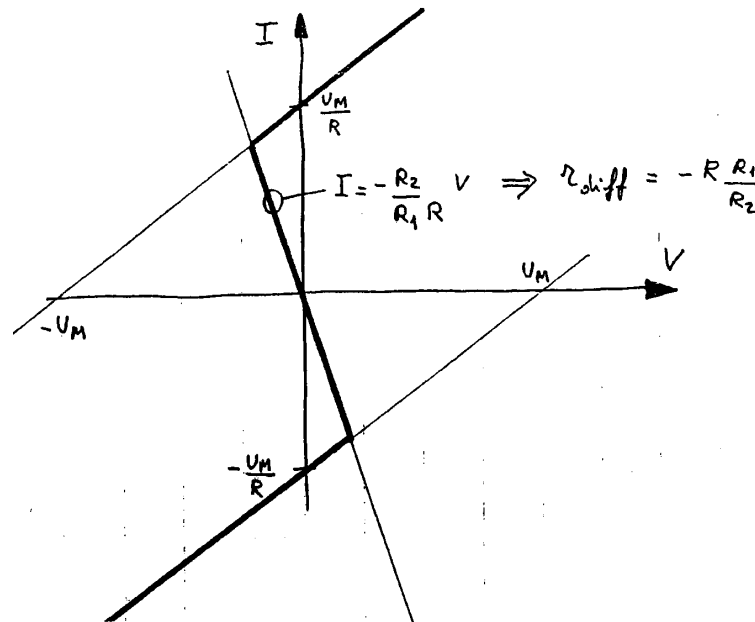


FIGURA 2.19. Caratteristica ad S del bipolo NIC I.

Come si può notare, in una certa parte della caratteristica risulta $r_{diff} = \frac{dV}{dI} < 0$, cioè si osserva una **resistenza differenziale negativa**. Un bipolo con resistenza differenziale negativa gode di proprietà abbastanza singolari: se per esempio si pilota il bipolo con un generatore

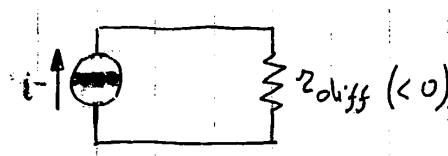


FIGURA 2.20. Un generatore di corrente pilota NIC I.

di corrente i di valore tale da intersecare la caratteristica S nel tratto a pendenza negativa, la potenza ceduta al bipolo vale (vedi fig. 2.20) $P = iV(i) = ir_{diff}i = r_{diff}i^2 < 0$. È il bipolo che cede potenza al generatore! Questo ovviamente è possibile perchè sappiamo che

dentro il bipolo ci sono delle sorgenti di energia, in particolare le due batterie che alimentano l'operazionale.

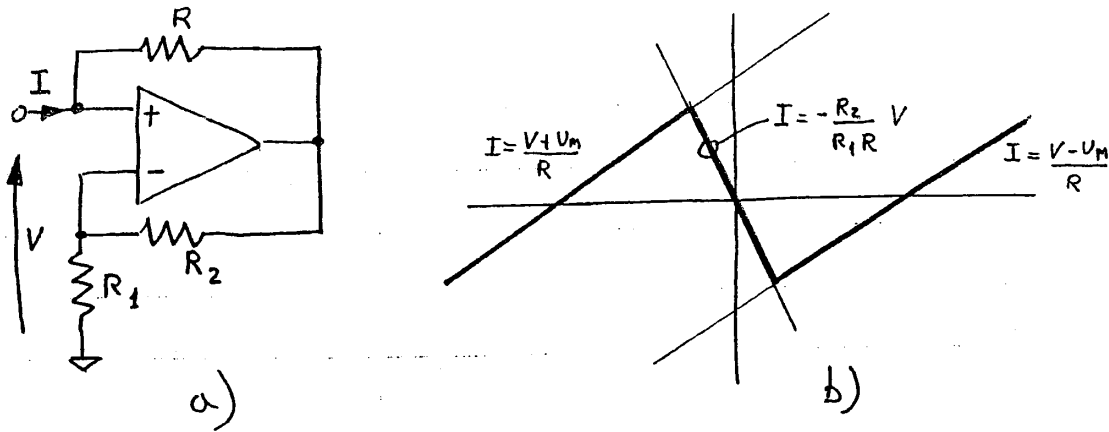


FIGURA 2.21. Caratteristica di tipo N - NIC II.

Un diverso NIC, con *caratteristica I-V di tipo N*, è mostrato in fig. 2.21). Il nome NIC deriva dal fatto che R , o l'impedenza eventualmente inserita al suo posto, viene moltiplicata per la costante reale negativa $-R_1/R_2$.

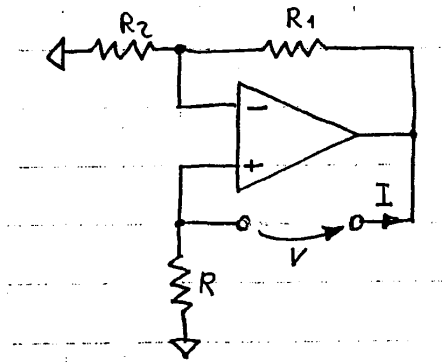


FIGURA 2.22. Bipolo S - NIC III.

Una caratteristica $I - V$ di tipo S identica a quella di fig. 2.19) è poi esibita dal circuito di fig. 2.22).

Un esempio di impiego del bipolo N di fig. 2.21) è fornito dall'integratore non invertente schematicamente illustrato in fig. 2.23). Il circuito di fig. 2.23a), comprendente la resistenza $-R$ fornita dal NIC, può essere schematizzato secondo Norton come in fig. 2.23b) e c). Come illustrato in figura, la relazione $V_u - V_i$ corrisponde ad una pura integrazione. Un esempio pratico è mostrato in fig. 2.23d): in serie al generatore di ingresso si è però inserita una resistenza $R' < R$ (di pochissimo), e pertanto non si riuscirà a realizzare esattamente un integratore ideale. La ragione della scelta è illustrata in fig. 2.23e), e sostanzialmente è legata alla impossibilità di avere le due resistenze esattamente uguali, ed alla necessità di evitare che compaiano soluzioni corrispondenti a tratti con pendenza positiva della caratteristica $I - V$.

Merita infine ricordare un'importante categoria di circuiti 2-porte che ben si prestano ad essere realizzati con amplificatori operazionali: quella dei *giratori*. Un giratore è un 2-porte lineare schematizzabile dal circuito di fig. 2.24). Per il 2-porte valgono le equazioni

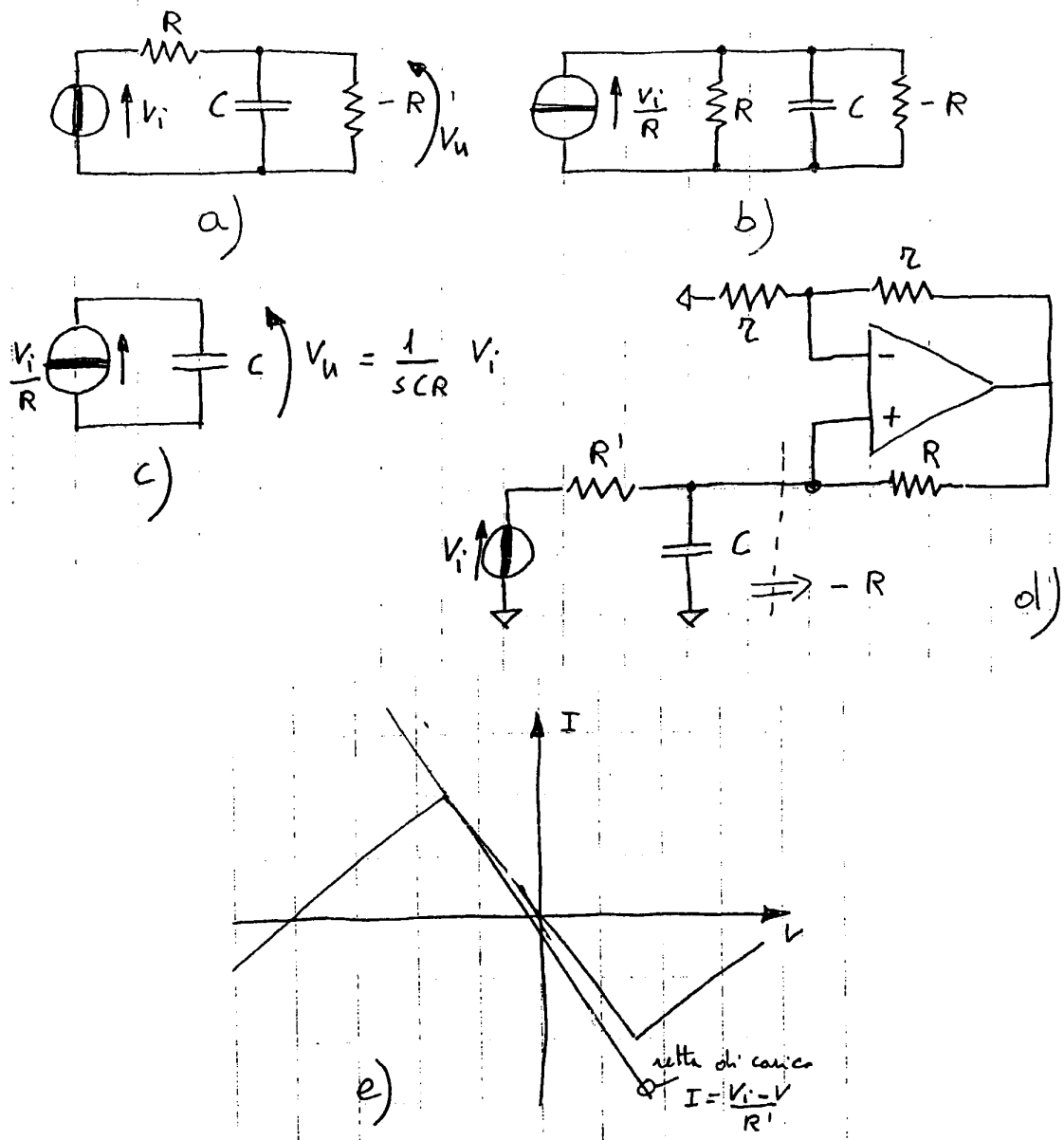


FIGURA 2.23. Integratore non invertente con l'impiego di NIC II.

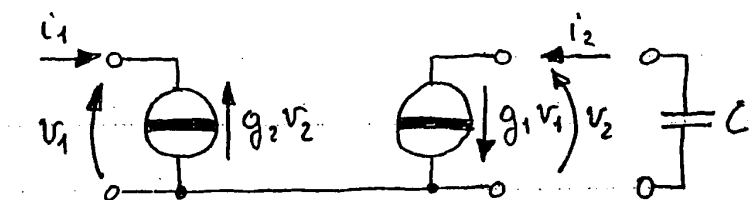


FIGURA 2.24. Il giratore.

$$i_1 = -g_2 v_2$$

$$i_2 = g_1 v_1$$

che, combinate con l'equazione del carico

$$i_2 = -sCv_2$$

portano a $v_2 = -\frac{g_1}{sC}v_1$, e quindi a $i_1 = \frac{g_1g_2}{sC}v_1$, cioè

$$\frac{v_1}{i_1} = s \frac{C}{g_1g_2} = sL_{eq} \quad (2.7)$$

avendo posto

$$L_{eq} = \frac{C}{g_1g_2} \quad (2.8)$$

Un giratore ha dunque la proprietà che, quando la porta di uscita è chiusa su una capacità, dalla porta d'ingresso si vede un'induttanza, e viceversa. La cosa è di grande interesse pratico perchè gli induttori, specie se di valore elevato, sono ingombranti, non sono integrabili (si riescono ad integrare solo piccoli induttori con basso fattore di merito) e tendono ad introdurre nel circuito dei disturbi, generati da campi magnetici variabili dovuti a sorgenti esterne che si accoppiano con le spire dell'induttore. Come poi risulta dalla equazione 2.8), è possibile con valori del tutto ragionevoli di C , g_1 e g_2 realizzare induttanze equivalenti di valore molto elevato: per esempio, prendendo $C = 10\mu F$ e $g_1 = g_2 = 10^{-3}\Omega^{-1}$ si realizza una induttanza equivalente di $10H$.

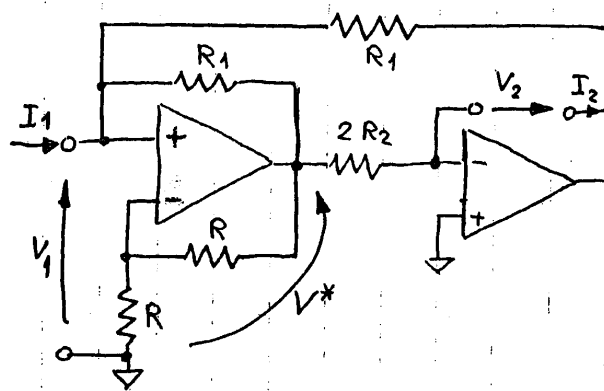


FIGURA 2.25. Giratore I.

Un primo schema di realizzazione, adatto se si vuole simulare un induttore con un capo massa, è mostrato in fig. 2.25). Applicando il principio del cortocircuito virtuale, $V^* = 2V_1$, $I_2 = V^*/(2R_2) = V_1/R_2$, $I_1 = -(2V_1 - V_1)/R_1 + (V_1 - V_2)/R_1 = -V_2/R_1$, equazioni che si identificano facilmente con quelle di un giratore. Un altro schema è riportato in fig. 2.26).

Entrambi gli schemi richiedono, per un buon funzionamento, il miglior accoppiamento possibile tra due coppie di resistori, nel caso di fig. 2.25) o tra quattro resistori nel caso di fig. 2.26). Un accoppiamento imperfetto porta ad avere un basso fattore di merito dell'induttore. Siccome ad abbassare il fattore di merito ci pensano già le non-idealità degli operazionali (guadagno finito, resistenza d'uscita non trascurabile, ...), è bene trovare schemi poco sensibili ai problemi di *matching*. Una soluzione è offerta dall'*impedance converter* di Antoniou, fig. 2.27). Per il cortocircuito virtuale $V = V_A = V_B$. Inoltre $I_{Z4} = I_{Z5} = V/Z_5$; $I = I_{Z1}$; $I_{Z2} = I_{Z3}$. Con qualche passaggio si ricava

$$\frac{V}{I} = \frac{Z_1Z_3Z_5}{Z_2Z_4} \quad (2.9)$$

Per simulare un'induttanza si mette una capacità al posto di Z_2 o Z_4 , e al posto di tutte le altre impedenze si mettono delle resistenze. Non ci sono problemi di accoppiamento di componenti

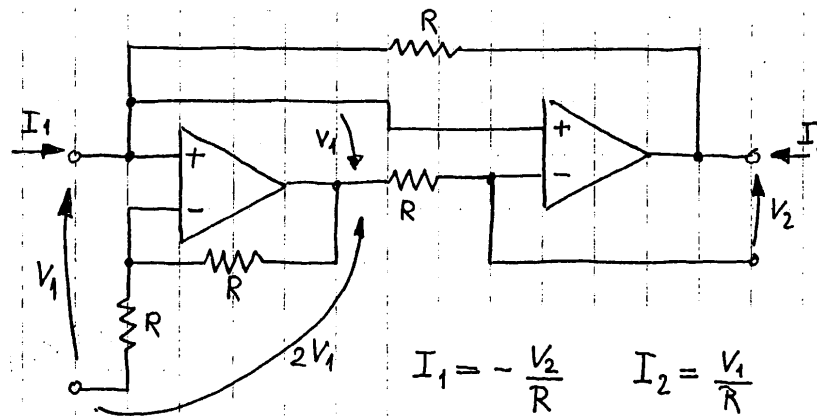


FIGURA 2.26. Giratore II.

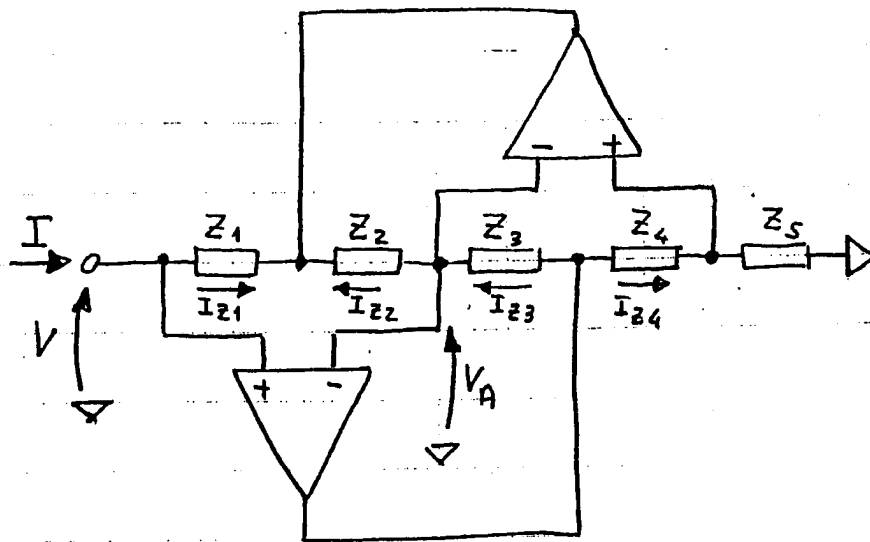


FIGURA 2.27. L' impedance converter di Antoniou.

passivi ed inoltre il circuito risulta abbastanza tollerante rispetto alla finitezza di guadagno e banda degli operazionali.

2.3. Una visione meno idealizzata

2.3.1. Effetti del guadagno finito, di R_u e di R_i . Gli amplificatori operazionali, anche prescindendo dagli effetti legati alla frequenza, son sempre caratterizzati da un guadagno in continua finito e da valori finiti della resistenza d' ingresso e della resistenza d' uscita. Per vedere come queste non idealità influenzino il guadagno ad anello aperto $H_d H_r$, possiamo fare riferimento al caso dell' amplificatore non invertente di fig. 2.28), interpretato come retroazione di tensione.

Considerando per l' amplificatore del ramo diretto la rappresentazione di fig. 2.29), cui corrisponde la matrice ibrida

$$\begin{bmatrix} R_i & 0 \\ -A^v \frac{R_i}{R_u} & \frac{1}{R_u} \end{bmatrix}$$

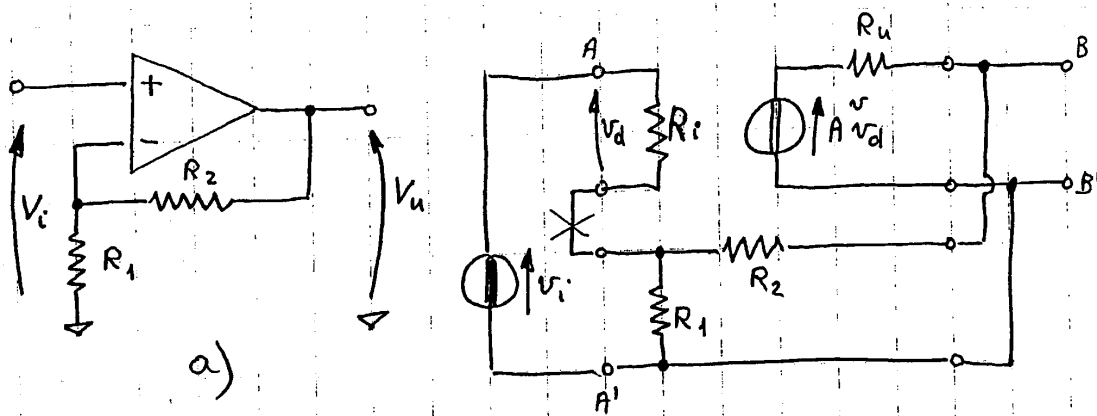


FIGURA 2.28. a) L' amplificatore, b) interpretazione come retroazione di tensione.

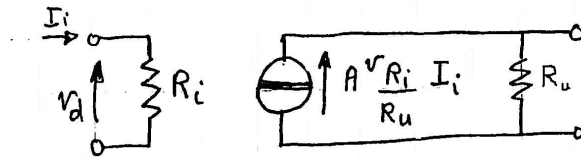


FIGURA 2.29. Modello per piccoli segnali dell' amplificatore.

e la matrice ibrida del 2-porte in retroazione

$$\begin{bmatrix} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} & \frac{R_1}{R_1 + R_2} \\ -\frac{R_1}{R_1 + R_2} & \frac{1}{R_1 + R_2} \end{bmatrix},$$

si ricava per il 2-porte AA' BB' la matrice:

$$\begin{bmatrix} R_i + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} & \frac{R_1}{R_1 + R_2} \\ -A^v \frac{R_i}{R_u} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} & \frac{1}{R_u} + \frac{1}{R_1 + R_2} \end{bmatrix},$$

da cui:

$$H_r = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$H_d = -\frac{(-A^v \frac{R_i}{R_u} - \frac{R_1}{R_1 + R_2})}{(R_i + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2})(\frac{1}{R_u} + \frac{1}{R_1 + R_2})} \quad (2.10)$$

$$\simeq A^v \frac{R_i}{(R_i + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2})} \frac{(R_1 + R_2)}{(R_u + R_1 + R_2)} \quad (2.11)$$

Non c'è nulla di particolare da osservare riguardo al calcolo di H_r . Per quanto riguarda invece H_d , il secondo termine della parentesi a numeratore nella equazione 2.10 ha modulo minore di 1, mentre il primo termine è il prodotto di due fattori entrambi molto maggiori di 1. Si può pertanto trascurare tranquillamente il secondo termine e ridursi alla espressione 2.11), che corrisponde al guadagno di tensione del circuito di fig. 2.30), ricavato dal circuito di fig. 2.28) operando come segue:

- per vedere come è caricata l' uscita, si apre la maglia d' ingresso in X, in modo da eliminare la retroazione;
- per vedere come viene caricato il generatore d' ingresso, si immagina di cortocircuitare l' uscita in modo da togliere la retroazione.

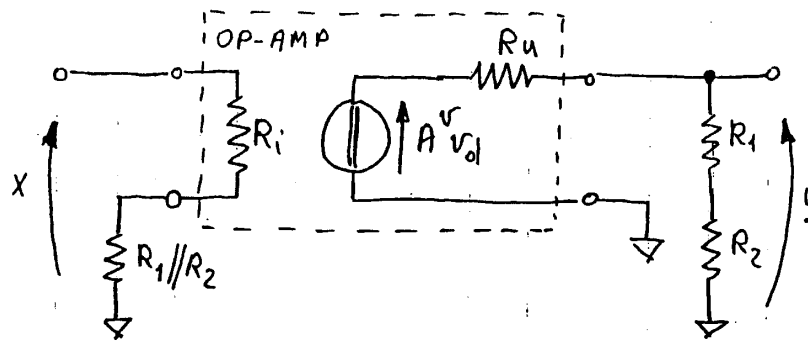


FIGURA 2.30. Schema per il calcolo di H_d .

Regole analoghe si possono definire per gli altri tipi di retroazione, ricordando che dove si trovano collegamenti in serie di due porte, per togliere la retroazione bisogna tagliare e aprire, mentre quando due porte sono in parallelo la retroazione si toglie cortocircuitando.

2.3.2. Struttura interna di un amplificatore operazionale. Lo schema semplificato di fig. 2.31) è tipico degli amplificatori operazionali basati sul sistematico impiego dei carichi attivi (amplificatori di terza generazione). Sono evidenziati un primo stadio differenziale, BJT1-2,

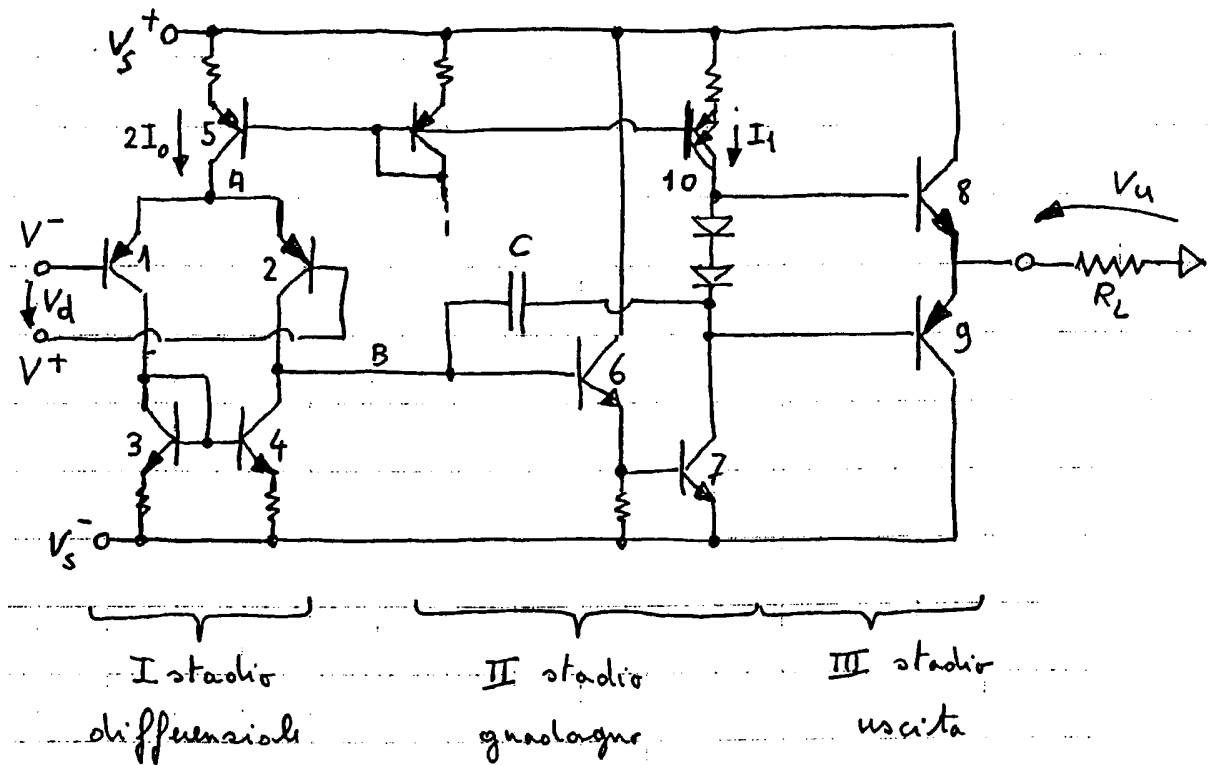


FIGURA 2.31. Schema di principio di un amplificatore operazionale di terza generazione.

con sensibile guadagno di tensione, un secondo stadio, BJT6-7, ad elevato guadagno di tensione ed uno stadio d' uscita, BJT8-9, a simmetria complementare.

La corrente di coda $2I_0$ per la coppia differenziale 1-2 è fornita dal BJT5, collegato a specchio di corrente. Scegliendo una corrente di polarizzazione I_0 di pochi μA , è facile ottenere

una resistenza differenziale d'ingresso $2r_{be}$ dell'ordine dei $M\Omega$, come si desidera per un buon operazionale. Il carico della coppia 1-2 è costituito dallo specchio di corrente 3-4, con resistori di degenerazione sugli emettitori per aumentare la resistenza differenziale vista dal collettore di BJT4. La tensione di uscita viene raccolta tra i collettori dei BJT 2 e 4. La resistenza differenziale vista da questo nodo è molto alta. Per rendersene conto, si può considerare che, per una sollecitazione d'ingresso antisimmetrica rispetto al punto di riposo, gli emettitori dei BJT1 e 2, ai piccoli segnali, si trovano circa a potenziale di massa. Dal nodo B verso massa si vedono pertanto la r_{ce2} del BJT2, la resistenza vista verso il collettore di BJT4, maggiore di r_{ce4} , e la resistenza d'ingresso dello stadio 6-7, $\simeq r_{be6} + r_{be7}(h_{fe6} + 1)$, pure elevata. Il parallelo delle tre resistenze è di valore elevato, e si può quindi contare su un elevato guadagno v_B/v_d . Pure elevato è il guadagno in continua dello stadio 6-7, per effetto del prodotto dei guadagni di corrente di BJT6 e 7 e della elevata resistenza differenziale di carico vista dal collettore di 7. Lo stadio d'uscita, come è noto, ha guadagno di tensione minore di uno.

Il condensatore C, posto in retroazione sullo stadio invertente 6-7, ha lo scopo di rendere stabile l'amplificatore introducendo un polo dominante che assicura che il guadagno di tensione scenda con una pendenza di -20dB/decade sino al guadagno unitario. L'effetto di separazione dei poli, tipico di questo collegamento in retroazione, è discusso nella sezione 2.5.4. Il condensatore C, peraltro, è responsabile del fenomeno della limitazione di *slew rate*, vedi sezione 2.6.3, che si manifesta come l'incapacità della tensione di uscita V_u di variare più rapidamente di $S = \left. \frac{dV_u}{dt} \right|_{max} = \frac{2I_0}{C}$.

Con qualche calcolo, relativamente lungo ma non complicato, ed un certo numero di approssimazioni è facile convincersi che con uno schema del tipo di fig. 2.31) è facile realizzare un guadagno di tensione in continua $v_u/v_d > 10^5$, con un polo reale dell'ordine di poche decine di rad/s utilizzando valori del tutto normali per i parametri dei BJT, e considerando una resistenza di carico dell'ordine del $k\Omega$ ed una capacità C dell'ordine della decina di pF . Si è dunque ottenuta un'elevata resistenza d'ingresso ed un elevato guadagno in continua, con *roll-off* a -20dB/decade fino a guadagno unitario, che, come si vedrà nella sezione 2.5, garantisce la possibilità di impiegare l'amplificatore con qualunque H_r reale ($0 < H_r < 1$).

La resistenza d'uscita, con il semplice schema di fig. 2.31), sarebbe relativamente elevata: se necessario, la si può abbassare sostituendo i BJT 8 e 9 con coppie Darlington.

2.4. Stabilità dei sistemi in retroazione

Per un circuito a costanti concentrate, qualunque funzione di trasferimento che leghi una grandezza (tensione tra due nodi o corrente in un ramo) di uscita ad uno stimolo (tensione o corrente) d'ingresso ha la forma di una **funzione razionale di s** . Come tale sarà pertanto una **funzione analitica**, per la quale vale il principio del **prolungamento analitico**, che afferma che una funzione analitica resta completamente determinata dai valori che essa assume su un qualsiasi arco di curva (comunque piccolo) del piano complesso. Questo ci consente di affermare che **se una funzione di trasferimento H è conosciuta sull'asse delle frequenze**, se cioè si conosce $H(j\omega)$, **H è da ritenersi nota in tutto il piano complesso**

Alle funzioni analitiche si applica il **teorema dell'indice logarimico**: *data una funzione analitica $f(s)$ e, sul piano s , una curva chiusa C lungo la quale $f(s)$ non ha né zeri né poli, ed all'interno della quale non compare nessuna singolarità essenziale di $f(s)$, detta $z - p$ la differenza tra il numero degli zeri ed il numero dei poli di f contenuti all'interno della curva C , vale la seguente proprietà: quando la variabile s percorre una volta in senso positivo (antiorario) la curva C , l'argomento di $f(s)$ varia di $2\pi(z - p)$.*

La situazione è illustrata in fig. 2.32): in fig. 2.32a) è indicata, nel piano complesso $s = \sigma + j\omega$ la posizione di due zeri (circoletti) ed un polo (croce), ed una curva chiusa C che li

abbraccia. In sostanza, quando il punto P percorre una volta la curva C in senso antiorario, il

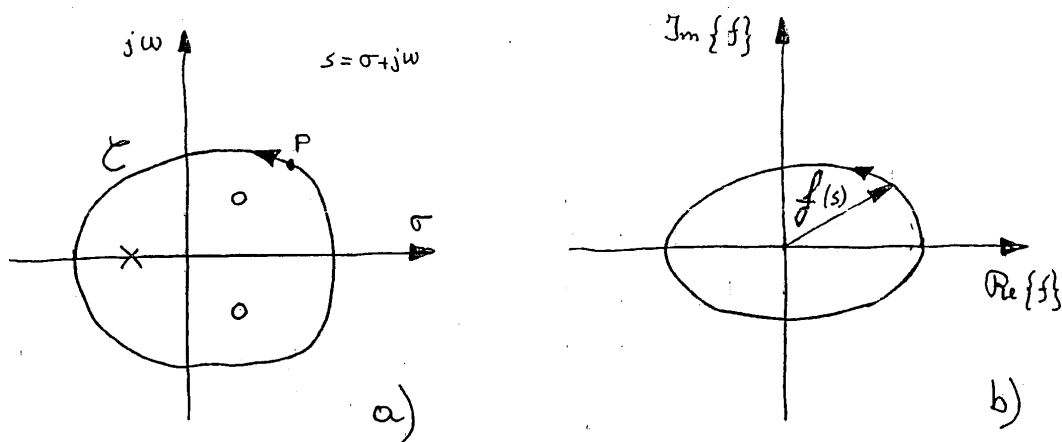


FIGURA 2.32. Teorema dell' indice logaritmico: a) la curva C , b) la traiettoria di $f(s)$.

vettore rappresentativo della funzione f compie tanti giri in senso antiorario intorno all' origine, quanti ne indica la differenza tra il numero degli zeri e il numero dei poli racchiusi dentro C , ciascuno contato con il proprio ordine di molteplicità (nell' esempio di figura, un giro).

$$\Delta \arg f(s) = 2\pi(z - p) \quad (2.12)$$

Il teorema dell' indice logaritmico è alla base di un importante criterio per valutare la stabilità di un sistema in retroazione, il criterio di Nyquist, dal quale discende poi il criterio di Bode, di uso più frequente.

2.4.1. Il criterio di Nyquist. Si consideri il sistema in retroazione di fig. 2.33), cui corrisponde la funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{S_u(s)}{S_i(s)} = \frac{H_d(s)}{1 + H_d(s)H_r(s)}. \quad (2.13)$$

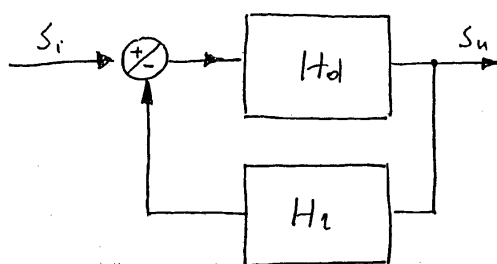


FIGURA 2.33. Sistema in retroazione.

Per valutare la stabilità del sistema occorre determinare i poli della funzione di trasferimento H e verificare che siano tutti a parte reale negativa.

Si fanno due ipotesi:

- a) H_d ed H_r sono stabili, cioè non hanno poli a parte reale positiva. Siccome i poli della funzione di trasferimento 2.13) sono i poli di H_d e gli zeri di $(1 + H_d H_r)$, per concludere che H è stabile è sufficiente dimostrare che $(1 + H_d H_r)$ non ha zeri nel semipiano destro.

- b) $\lim_{|s| \rightarrow \infty} (1 + H_d H_r) = A$, costante reale. (In pratica, $|H_d H_r| \rightarrow 0$ e $A \rightarrow 1$).

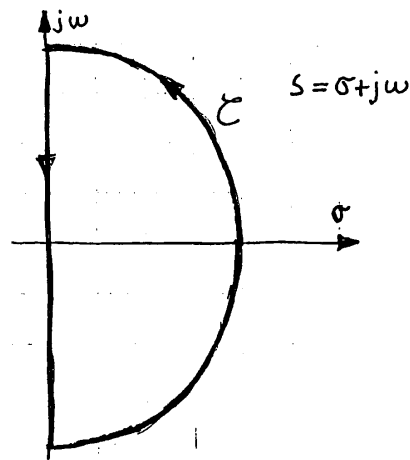


FIGURA 2.34. Una scelta conveniente della curva C .

Consideriamo allora nel piano s la curva C di fig. 2.34), che comprende un tratto dell'asse immaginario ed un arco di circonferenza col centro nell'origine. Supponiamo, per il momento, che $1 + H_d H_r$ non abbia ne' zeri ne' poli sull'asse immaginario. Si intuisce che, al tendere all'infinito del raggio della circonferenza, la curva C tende a comprendere tutto il semipiano a parte reale positiva. In tali condizioni, $1 + H_d H_r$ tende ad essere costante sull'arco di circonferenza, per cui il suo argomento non cambia quando si percorre la circonferenza. Dunque, secondo

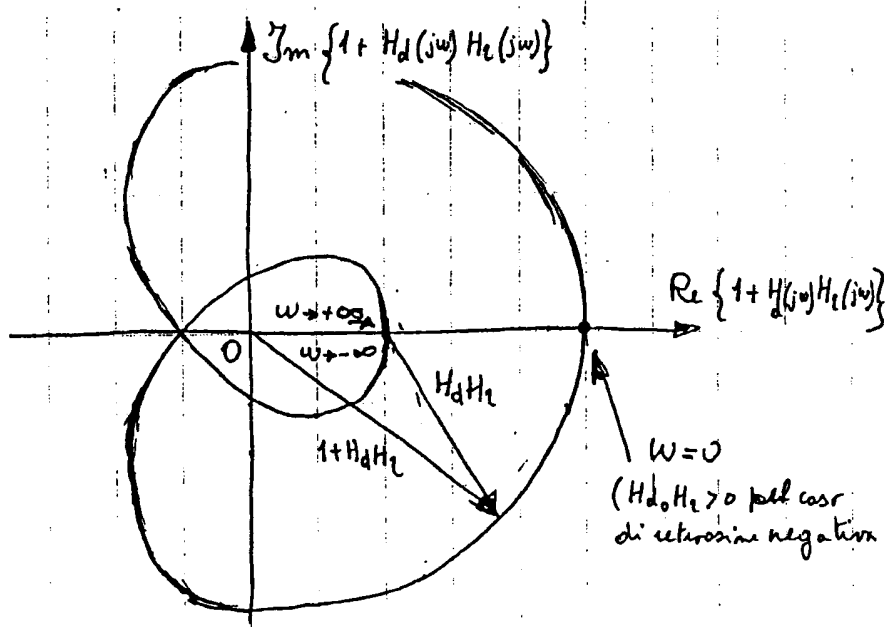


FIGURA 2.35. Diagramma polare di $1 + H_d H_r$ nel caso di due poli nel semipiano destro.

il teorema dell'indice logaritmico, la differenza tra il numero z degli zeri e quello p dei poli di $(1 + H_d H_r)$ contenuti nel semipiano destro è pari al numero di giri intorno all'origine in senso antiorario compiuti da $(1 + H_d(j\omega)H_r(j\omega))$ quando si percorre l'asse immaginario, cioè al variare di $j\omega$ da $+j\infty$ a $-j\infty$. Siccome poi ne' H_d ne' H_r hanno poli nel semipiano

destro, il numero di giri di $(1 + H_d(j\omega)H_r(j\omega))$ intorno all'origine è pari al numero di zeri di $(1 + H_d(s)H_r(s))$ posti nel semipiano destro, e quindi al numero di poli a parte reale positiva di $H(s)$. Nell'esempio di fig. 2.35), passando ω da $+\infty$ a $-\infty$ il vettore $(1 + H_d(j\omega)H_r(j\omega))$ compie due giri intorno all'origine in senso antiorario, quindi ci aspettiamo due poli di $H(s)$ nel semipiano destro, dunque instabilità.

Si noti infine che considerare i giri intorno all'origine di $(1 + H_dH_r)$ equivale a considerare i giri di H_dH_r intorno al **punto critico** $(-1, 0)$, vedi fig. 2.36). Si noti la simmetria rispetto all'

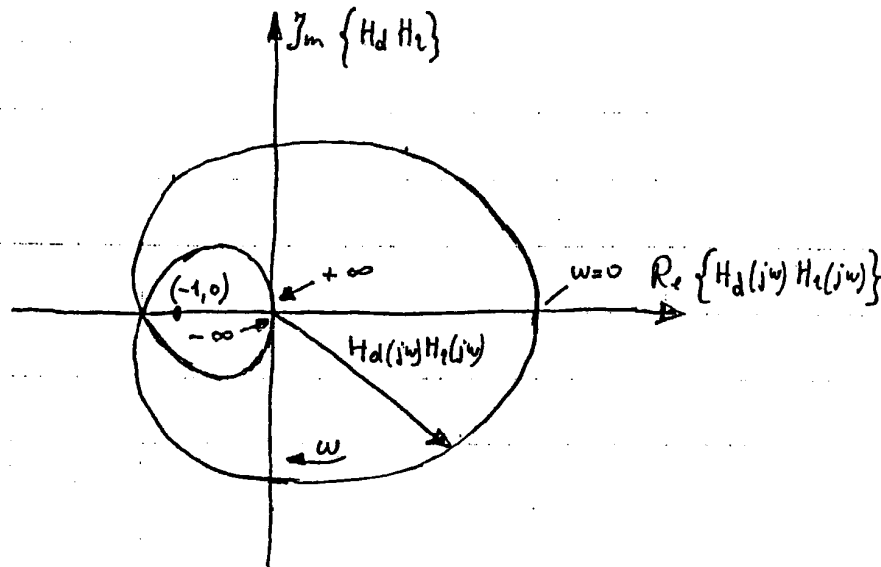


FIGURA 2.36. Diagramma di Nyquist nel medesimo caso.

asse reale: per sistemi fisici, la risposta all'impulso $h(t)$ è reale, e $H(-j\omega) = H^*(j\omega)$.

Si può fornire il seguente enunciato del criterio di Nyquist, enunciato che non è il più generale possibile ma copre la maggior parte dei casi pratici.

Criterio di Nyquist.

Se $H_d(s)H_r(s)$ non ha poli nel semipiano destro ed ha al più un polo nell'origine, semplice o doppio, condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema in retroazione di fig. 2.32) sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo della funzione $H_d(j\omega)H_r(j\omega)$ non circonda ne' tocchi il punto critico $(-1 + j0)$.

2.4.2. Il criterio di Bode. Altro non è che la lettura del criterio di Nyquist sui diagrammi di Bode, o diagrammi logaritmici della risposta in frequenza.

Criterio di Bode.

Se $H_d(s)H_r(s)$ non ha poli nel semipiano destro, ed ha al più un polo nell'origine, semplice o doppio, il sistema di fig. 2.32) è stabile se, a tutte le frequenze per cui risulta $\arg(H_d(j\omega)H_r(j\omega)) = \pi$ è verificata la condizione $|H_d(j\omega)H_r(j\omega)| < 1$.

La praticità degli enunciati di Nyquist e di Bode è legata al fatto che $H_d(j\omega)$ ed $H_r(j\omega)$ si possono determinare sperimentalmente, in modulo e fase, e sulla base di tali misure è quindi possibile trarre conclusioni sulla stabilità del sistema in retroazione.

Le fig. 2.37a) e b) illustrano un esempio di applicazione del criterio di Bode. Il sistema di fig. 2.37a) non soddisfa il criterio di Bode, e non si può quindi affermare che il sistema sia stabile; quello di fig. 2.37b) lo soddisfa, ed è sicuramente stabile.

Quanto più il diagramma di Nyquist di un sistema stabile ad anello aperto si svolge lontano dal punto critico, tanto più è difficile che la variazione di qualche parametro del sistema

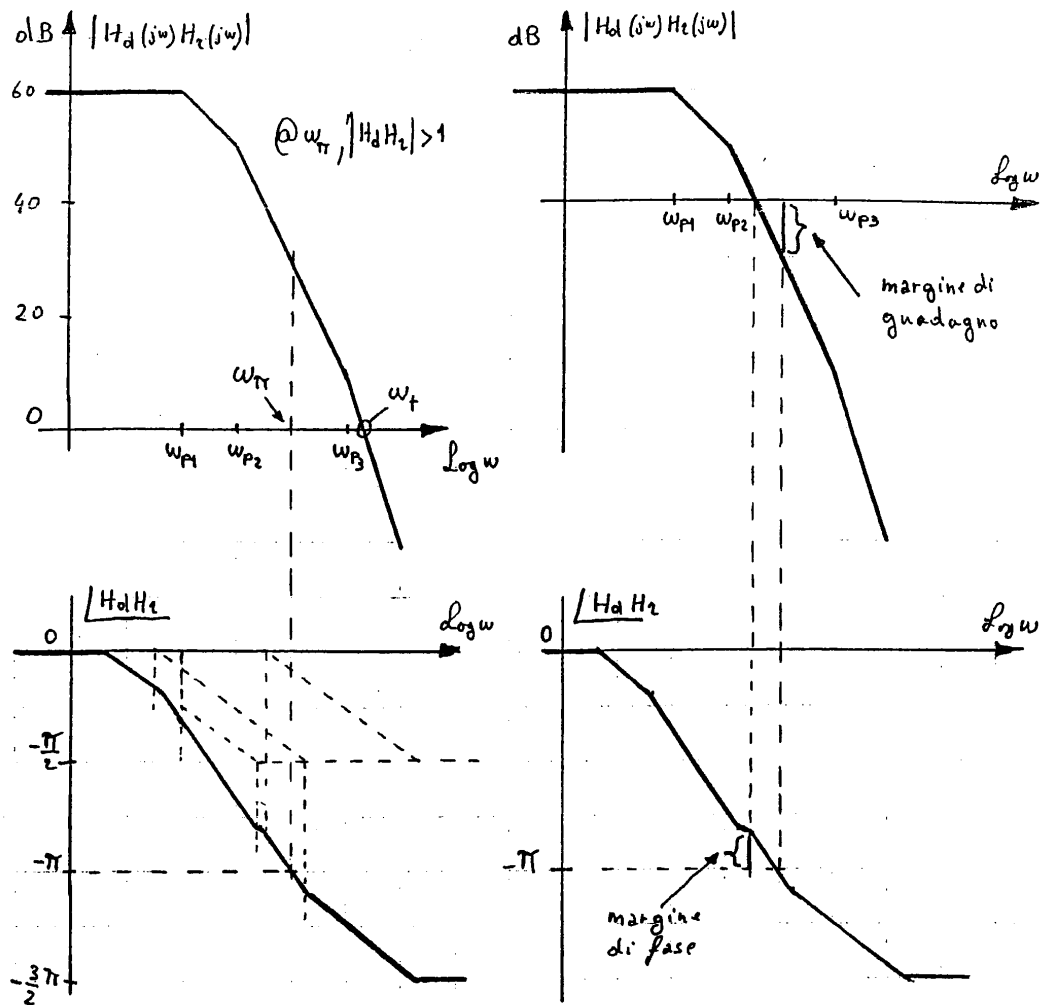


FIGURA 2.37. a) Un sistema che non rispetta il criterio di Bode; b) con gli stessi poli, ma un minor guadagno in continua, il criterio di Bode è soddisfatto.

porti all'instabilità. Comunque, il fatto di passare lontano dal punto critico è garanzia di buon comportamento dinamico: bassa sovralongazione nella risposta al gradino, limitati picchi di risonanza nella risposta in frequenza. Tutto questo tanto più attendibile, quanto più regolare è la diminuzione di $|H_d H_r|$ al crescere della frequenza. Usa, a questo proposito, definire due parametri che danno una misura della bontà del comportamento dinamico del sistema.

Margine di guadagno: è l'inverso del modulo del guadagno ad anello aperto $|H_d H_r|$ alla pulsazione corrispondente alla fase $-\pi$.

Margine di fase: è l'angolo che occorre sottrarre alla fase del guadagno ad anello aperto, alla pulsazione per cui $|H_d H_r| = 1$, per ottenere $-\pi$.

Valori tipici per un buon comportamento dinamico sono da 12 a 16dB (da 4 a 6) di margine di guadagno e da 45° a 60° di margine di fase.

Merita infine considerare il caso particolare di un sistema in retroazione negativa in cui il guadagno ad anello aperto $H_d H_r$ sia una funzione razionale che non abbia poli né zeri nel semipiano destro (*funzione di trasferimento a fase minima*). Risulta in questo caso che il margine di fase è certamente maggiore di 45° se il diagramma asintotico di $|H_d(j\omega)H_r(j\omega)|$ interseca l'asse a 0dB con una pendenza asintotica di -20dB/decade . Talvolta è a questo enunciato che si riserva il nome di criterio di Bode.

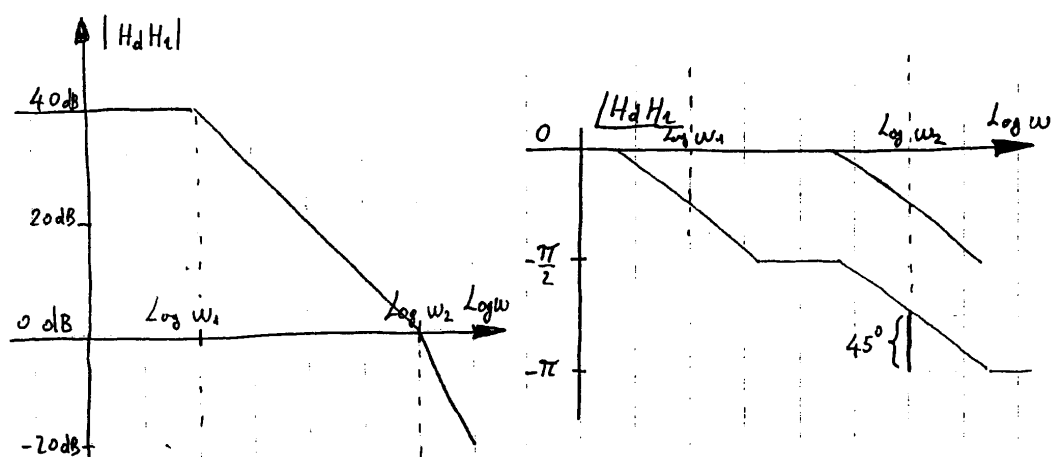


FIGURA 2.38. Il caso di un sistema a fase minima.

Prendiamo, a questo proposito, in esame la situazione di fig. 2.38), in cui il guadagno ad anello aperto presenta due poli spaziatosi di più di una decade, il secondo in corrispondenza dell'intersezione con l'asse a 0dB. È evidente in tal caso che, alla frequenza per cui il guadagno asintotico è unitario, il primo polo ha già contribuito con una rotazione di fase di -90° , mentre il secondo contribuisce con -45° , garantendo comunque un margine di fase di 45° . Si noti che un sistema di questo genere è comunque stabile.

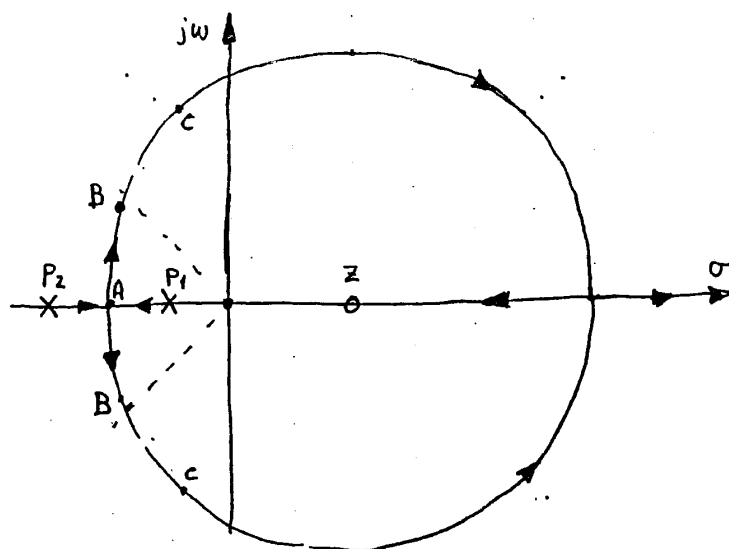


FIGURA 2.39. Luogo delle radici per un sistema del second' ordine con uno zero positivo.

In generale, diminuendo il margine di fase, e quindi quello di guadagno, la parte immaginaria dei poli della funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso aumenta in modulo, mentre la parte reale tende a calare (sempre in modulo). La risposta al gradino presenta pertanto sovraelongazioni sempre più marcate. La situazione, con riferimento ad un sistema del second' ordine con due poli reali e negativi ed uno zero positivo, è illustrata dal **luogo delle radici** di fig. 2.39). Posto $H_d(S)H_r(s) = kg(s)$, dove k rappresenta qualche parametro del sistema ad anello aperto, per esempio il guadagno in continua, e $g(s)$ altro non è che $H_d H_r/k$, il luogo

delle radici ci mostra come sono posizionate le radici dell' equazione $1 + H_d(s)H_r(s) = 0$. Siccome H_d ed H_r si suppongono stabili, sono infatti le radici di $1 + H_d(s)H_r(s) = 0$ le sole che possono essere responsabili di instabilità nel sistema retroazionato. Da $1 + H_d(s)H_r(s) = 0$ segue $|g(s)| = 1/|k|$. Se $k \rightarrow 0$, $|g| \rightarrow \infty$: per $k = 0$ ritrovo i poli di H_dH_r . Analogamente, per $|k| \rightarrow \infty$ si ritrovano gli zeri di H_dH_r .

Ridurre il margine di fase, per un sistema di questo genere, vuol dire aumentare il guadagno in continua e spostarsi, sul luogo delle radici, dalla situazione con due poli reali negativi verso A poi B , poi C . La risposta al gradino, come si può vedere in fig. 2.40), peggiora notevolmente

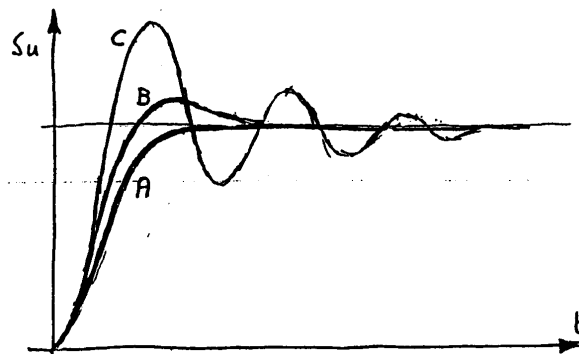


FIGURA 2.40. Risposta al gradino in corrispondenza delle tre situazioni marcate sul luogo delle radici.

da A a C .

Si noti che per questo sistema, che non è a fase minima, non è lecito ritenere che sia garantita la stabilità con un margine di fase di 45° se l' incrocio con l' asse a 0dB avviene con una pendenza di -20dB/decade . Si consideri, per esempio, cosa succederebbe aumentando il guadagno

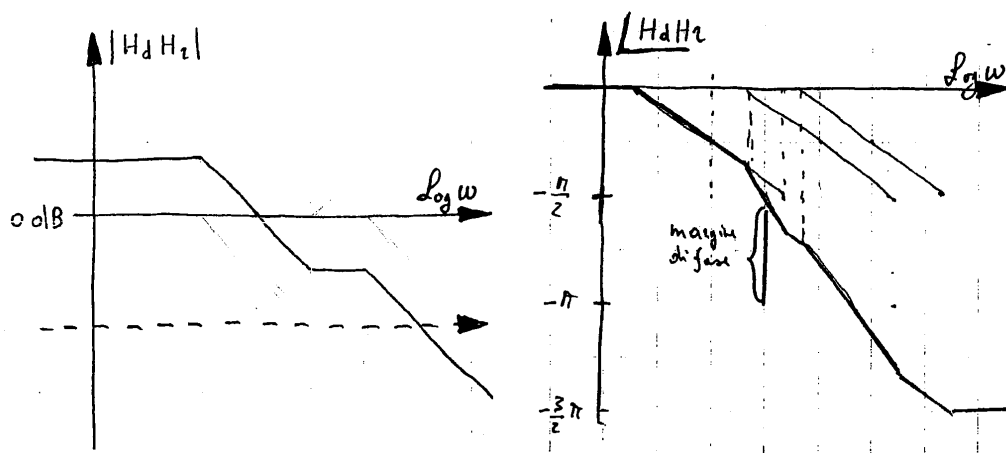


FIGURA 2.41. Diagrammi di Bode per guadagno in continua molto piccolo (poli reali).

in continua fino ad avere l' asse a 0dB nella posizione tratteggiata in fig. 2.41a).

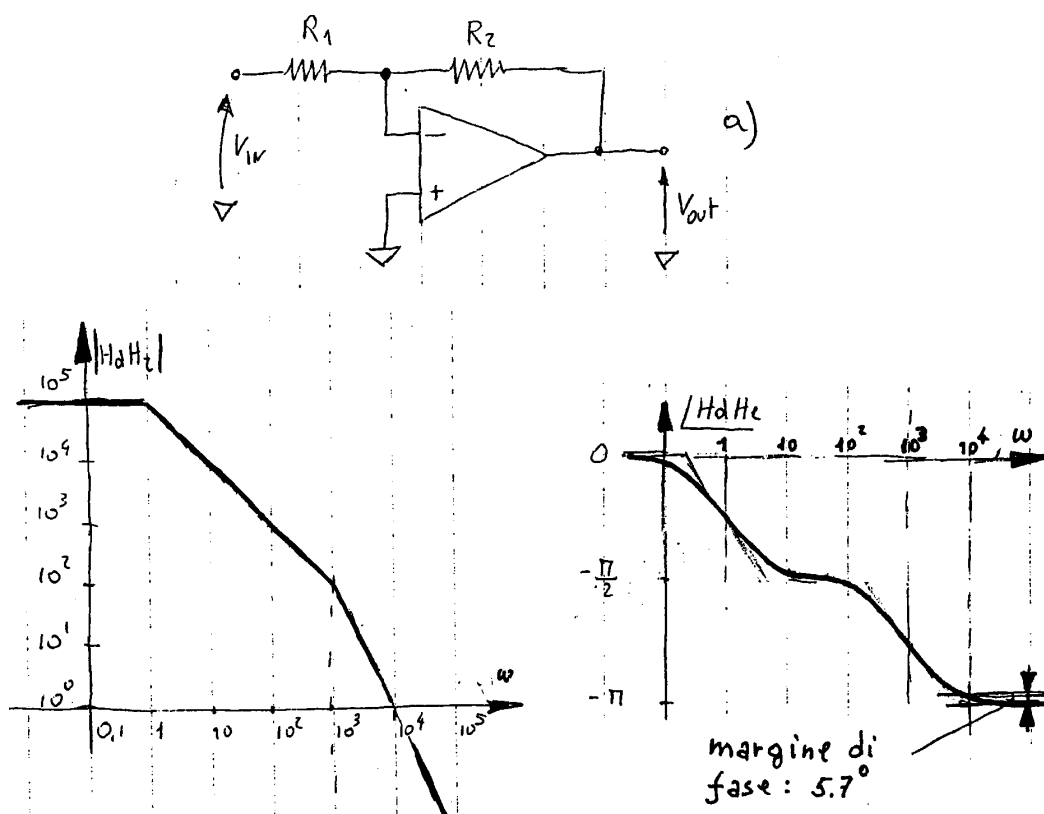


FIGURA 2.42. a) Schema dell' amplificatore; b), c) diagrammi asintotici del guadagno.

2.5. Compensazione degli amplificatori

Si consideri un amplificatore operazionale con impedenza d' ingresso infinita, impedenza d' uscita nulla e guadagno di tensione

$$A_v = H_d = \frac{10^7}{(s+1)(10^{-3}s+1)}. \quad (2.14)$$

Con questo operazionale si vuol realizzare un amplificatore invertente con guadagno -99 . Dalla specifica sul guadagno segue

$$R_2/R_1 = 99$$

e quindi

$$H_r = R_1/(R_1 + R_2) = 10^{-2}.$$

Il guadagno ad anello aperto è pertanto

$$H_d H_r = \frac{10^5}{(s+1)(10^{-3}s+1)}.$$

Come si nota dalla parte c) della figura, il margine di fase, 5.7° è molto piccolo; ci possiamo pertanto aspettare un forte *overshoot* nella risposta al gradino, ed un picco nella risposta in frequenza. In effetti, il guadagno in continua è molto alto, e i due poli reali del sistema ad anello aperto danno luogo, esaminando il luogo delle radici, a due poli complessi coniugati della funzione di trasferimento del sistema in retroazione.

2.5.1. Compensazione per riduzione del guadagno. Se riducessimo R_1 , potremmo ridurre il guadagno ad anello aperto a tutte le frequenze, e migliorare quindi la stabilità del circuito. Purtroppo però cambierebbe anche il guadagno ad anello chiuso, il chè è inaccettabile. La

soluzione è allora quella di inserire una resistenza R tra i due morsetti d'ingresso dell'operazionale come illustrato in fig. 2.43): R appare in parallelo ad R_1 ai fini del guadagno ad anello

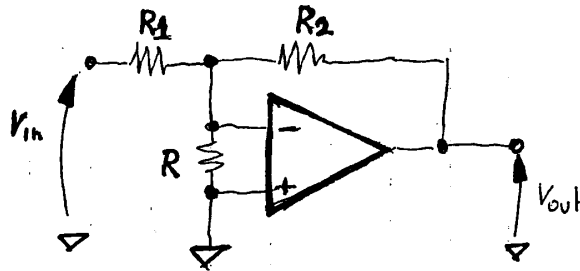


FIGURA 2.43. Compensazione per riduzione del guadagno.

aperto, e non conta per il guadagno ad anello chiuso, essendo virtualmente cortocircuitata.

Chiamiamo

$$H'_r = \frac{R_1 \parallel R}{R_2 + R_1 \parallel R}$$

la funzione di trasferimento del ramo di retroazione una volta inserita la resistenza R di compensazione.

Se vogliamo un margine di fase di 45° , deve essere $\arg(H_d H'_r) = -135^\circ$. Essendo H'_r reale, questo si verifica alla pulsazione del secondo polo di H_d , 10^3 rad/s . A tale frequenza dovrà risultare $|H_d H'_r| = 1$. Poichè a 10^3 rad/s risulta $|H_d| = 7071$, dovremo scegliere R in modo che

$$H'_r = \frac{R_1 \parallel R}{R_2 + (R_1 \parallel R)} = \frac{R}{(1 + R_2/R_1)R + R_2} = \frac{1}{7071}$$

Siccome, per ottenere il guadagno ad anello chiuso desiderato, deve risultare $R_2/R_1 = 99$, si perviene alla condizione $R/(100R + 99R_1) = 1/7071$, che si traduce nella $R = R_1/70.4$. Con

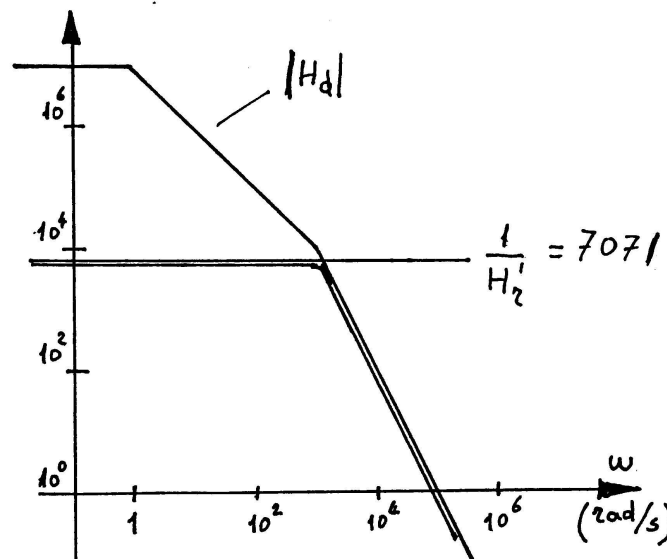


FIGURA 2.44. Compensazione per riduzione del guadagno: diagrammi del guadagno.

questa tecnica si ottiene una desensibilizzazione modesta a tutte le frequenze, come è mostrato nel diagramma asintotico di fig. 2.44). Il margine di fase, per cui è stato necessario ricorrere

alla compensazione, dipende invece dal comportamento di $H_d H_r$ soltanto in prossimità della frequenza di incrocio: dunque il comportamento in bassa frequenza è inutilmente penalizzato.

2.5.2. Compensazione con rete di ritardo. In realtà interessa ridurre il guadagno solo in prossimità della frequenza d'incrocio, garantendo che il sistema rimanga a fase minima. Questo si può ottenere con la rete di fig. 2.45), in cui il condensatore impedisce ad R di avere effetto a bassa frequenza. Ad anello chiuso $V_{out}/V_{in} \simeq -R_2/R_1$ per il principio del cortocircuito

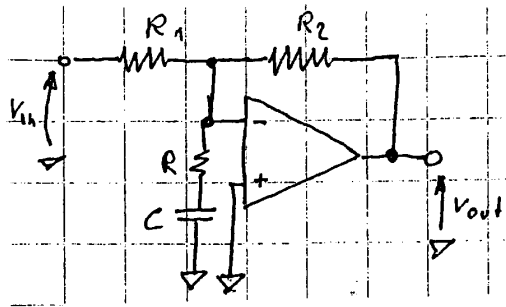


FIGURA 2.45. Compensazione con rete di ritardo: il circuito.

virtuale. Per quanto riguarda il guadagno ad anello aperto del sistema compensato si trova

$$\begin{aligned} H_d H_r' &= \frac{R_1 \parallel (R + 1/sC)}{R_2 + R_1 \parallel (R + 1/sC)} H_d(s) = \\ &= \frac{R_1}{(R_1 + R_2)} \frac{1 + sCR}{(1 + sC[R + R_1 \parallel R_2])} H_d(s). \end{aligned}$$

È immediato verificare che ad alta frequenza $H_r' \rightarrow \frac{R}{(1 + R_2/R_1)R + R_2}$, lo stesso valore che si aveva con la compensazione per riduzione del guadagno. $H_r'(s)$ contiene uno zero reale negativo ed un polo che è sempre a frequenza più bassa dello zero. È il polo che assicura la riduzione del guadagno; purtroppo però esso introduce un ritardo che peggiora il margine di fase.

Una semplice procedura di progetto, il cui successo peraltro non è garantito, è la seguente.

- Si calcola R secondo la stessa procedura utilizzata per la compensazione mediante riduzione del guadagno, in modo però da rispettare un margine di fase di circa 6° maggiore di quello che si vuole effettivamente ottenere. Se si vuole, come prima, un margine di fase di 45° , si deve determinare la frequenza per cui $\arg(H_d) = 180^\circ - (45 + 6)^\circ = 129^\circ$. Con qualche calcolo si trova che questo avviene alla frequenza di 810 rad/s . Si calcola poi $|H_d(j810)| = 9593$. Supponendo che a questa frequenza H_r' abbia già raggiunto il valore asintotico in alta frequenza $R/[(1 + R_2/R_1)R + R_2]$, si impone che tale valore risulti pari a $1/9593$.
- Sapendo che deve essere $R_2/R_1 = 99$ per garantire, a bassa frequenza, il valore desiderato del guadagno ad anello chiuso, la condizione precedente diventa

$$\frac{R}{(100R + 99R_1)} = \frac{1}{9593},$$

cioè $R = R_1/95.9$. Scegliendo $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$, si trova $R = 104 \Omega$, $R_2 = 990 \text{ k}\Omega$.

- Si posiziona lo zero una decade sotto la frequenza di 810 rad/s , che diverrà la nuova frequenza d'incrocio. Con questa scelta, se il polo di $C(s)$ è almeno una decade sotto lo zero, si verificherà che alla frequenza d'incrocio il polo ha portato per intero il suo contributo di 90° di ritardo, mentre lo zero avrà contribuito con $(90 - 5.7)^\circ$ di anticipo. Complessivamente, la coppia zero-polo del compensatore sarà responsabile,

alla frequenza d'incrocio, di 5.7° di ritardo. Nell'esempio specifico, imponendo che lo zero si trovi a -81rad/s , da $\omega_z = 1/CR$ si ricava $C = (\omega_z R)^{-1} = 118\mu\text{F}$.

- Il polo del compensatore, perchè valgano le considerazioni appena svolte, è bene che si trovi ad una frequenza più bassa della frequenza dello zero di almeno una decade. Deve cioè risultare

$$\frac{\omega_z}{\omega_p} = \frac{R + R_1 \parallel R_2}{R} = 1 + \frac{R_1 \parallel R_2}{R} \geq 10.$$

Nel nostro caso questo rapporto vale circa 96 e non ci sono problemi.

La compensazione con rete di ritardo porta ad ottenere grosso modo la stessa frequenza d'incrocio che si potrebbe ottenere con la compensazione per riduzione del guadagno (nell'esempio 810rad/s contro 1000rad/s per 45° di margine di fase) ma consente di avere una buona desensibilizzazione a bassa frequenza, come appare evidente dai diagrammi asintotici di fig. 2.46); il valore del guadagno ad anello chiuso però non è costante nella banda passante.

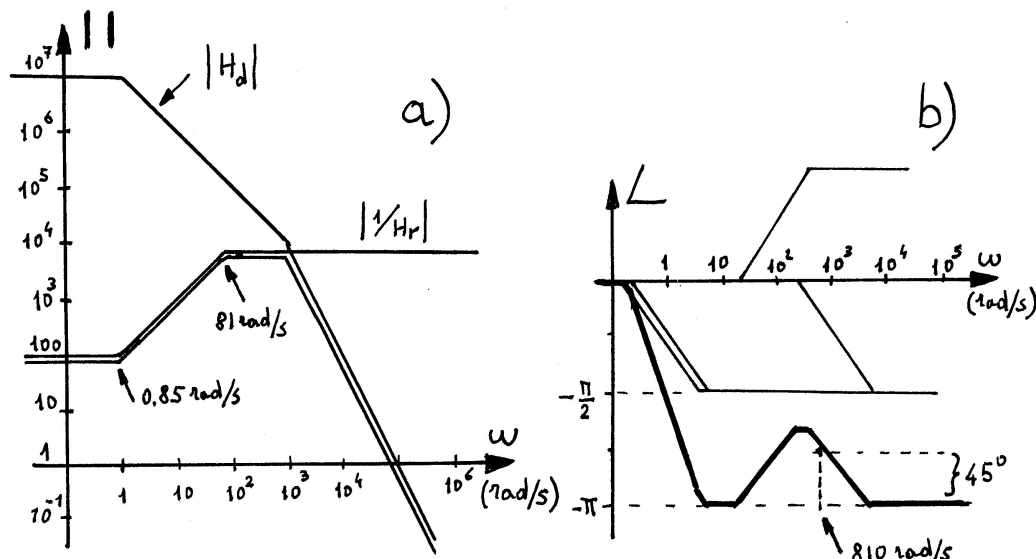


FIGURA 2.46. Compensazione con rete di ritardo, diagrammi asintotici: a) modulo, b) fase.

2.5.3. Compensazione con rete di anticipo. Nei due metodi precedenti si cercava di migliorare il margine di fase riducendo $|H_d H_r'|$ alla scopo di abbassare la frequenza d'incrocio. In alternativa si può cercare di agire sull'argomento anzichè sul modulo di $H_d H_r'$. Si cerca cioè di introdurre uno sfasamento in anticipo, in prossimità della frequenza d'incrocio, in modo da migliorare il margine di fase. Si può usare il circuito di fig. 2.47). Ovviamente, la funzione di trasferimento ad anello chiuso non è più $-R_2/R_1$; tuttavia la funzione di trasferimento ad anello chiuso che si ottiene approssima $-R_2/R_1$ meglio e in un campo di frequenze più ampio di quanto si riesca a fare nei due modi precedenti.

Introducendo come al solito il guadagno $H_d H_r'$ del sistema compensato possiamo scrivere

$$H_d H_r' = \frac{R_1}{R_1 + (R_2 \parallel 1/sC)} H_d = \frac{1 + sCR_2}{1 + R_2/R_1 + sCR_2} H_d(s).$$

Lo zero di H_r' qui è a frequenza più bassa di quella del polo, a differenza di quanto accadeva nella rete di ritardo.

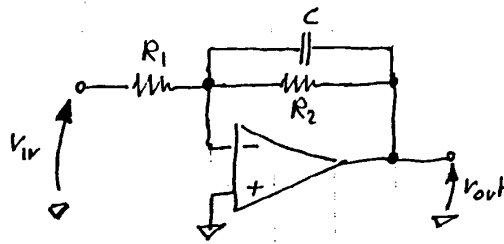


FIGURA 2.47. Compensazione con rete di anticipo: il circuito.

Come primo tentativo si può posizionare lo zero sulla frequenza d'incrocio del sistema non compensato. Si varia poi la sua posizione intorno a questo valore cercando di raggiungere il margine di fase desiderato. Se si riescono a soddisfare le specifiche, come nel caso di fig. 2.48), il progetto è concluso. Se tuttavia non si riesce, si può usare una combinazione di rete di anticipo

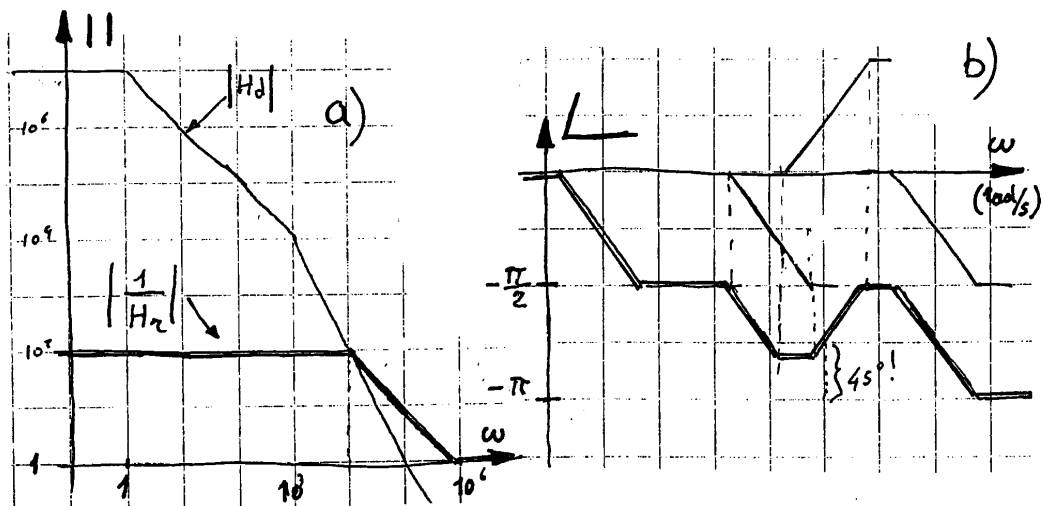


FIGURA 2.48. Compensazione con rete di anticipo: diagrammi asintotici.

e di rete di riduzione del guadagno. Se poi la riduzione del guadagno necessaria è troppo forte, alla rete di riduzione del guadagno si può sostituire una rete di ritardo (compensazione con *rete di anticipo-ritardo*).

2.5.4. Compensazione sfruttando l'effetto Miller (*pole splitting*). È una tecnica che viene spesso impiegata per rendere stabili gli amplificatori operazionali per qualunque valore reale e maggiore o uguale a uno di H_r . A tal fine è sufficiente che il guadagno di tensione dell'amplificatore sia a fase minima e cali con una pendenza di -20dB/decade sino a guadagno unitario. Studieremo pertanto il fenomeno della separazione dei poli (*pole splitting*) con riferimento ad un circuito, quello di fig. 2.49), che riprende alcuni aspetti dell'architettura di un amplificatore operazionale, con semplificazioni però così drastiche da renderlo di scarso interesse pratico. L'interesse sta tutto nella possibilità di svolgere un'analisi relativamente semplice. Supponiamo che risulti $2I_0 = I_1 = 1\text{mA}$, $R_L = 15\text{k}\Omega$, $|V_{Early}| = 100\text{V}$, $h_{FE} = \beta_0 = 100$ e che, per $V_d = 0\text{V}$ risulti $V_u = 0\text{V}$ (punto di riposo).

Considerato l'elevato valore della tensione di Early, si può in prima approssimazione trascurare r_{ce} ed utilizzare per i BJT il circuito equivalente a due parametri. Lo specchio di corrente BJT3-4 può poi venir schematizzato, vedi fig. 2.50), come un generatore di di corrente i che

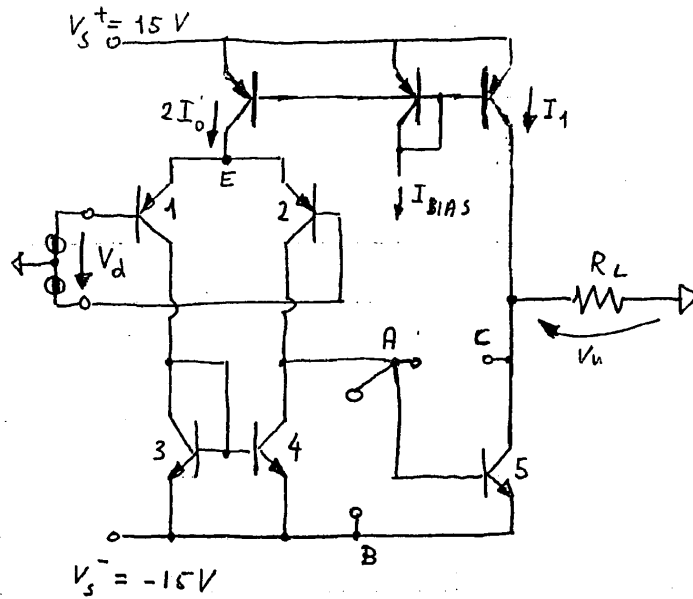


FIGURA 2.49. Il circuito analizzato.

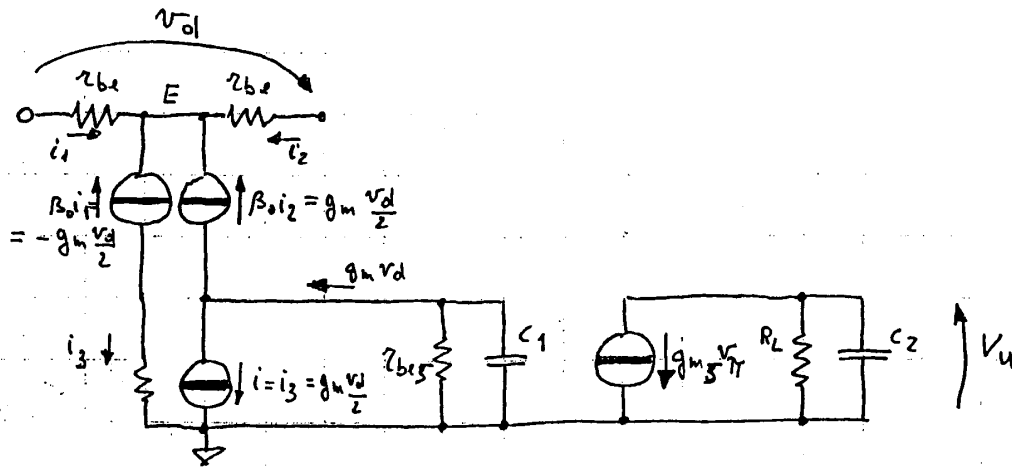


FIGURA 2.50. Il circuito per piccoli segnali.

copia la corrente i_3 . Siano $C_1 = 77pF$ e $C_2 = 3pF$ due capacità responsabili del comportamento a bassa frequenza del guadagno di tensione. Si noti che sono valori poco realistici (specie C_1) per lo specifico tipo di circuito.

Considerando che nel punto di riposo BJT1 e BJT2 hanno la stessa corrente di collettore I_0 , $g_{m1} = g_{m2} = g_m$. Dall' equazione del nodo E $i_2 = -i_1$, e quindi $v_d = 2r_{be1}i_2$, ed infine $\beta_0 i_2 = g_m v_d / 2$. La corrente che pilota il parallelo $r_{be5}C_1$ è pari a $g_m v_d$. Il circuito si può quindi ridurre alla forma di fig. 2.51). Risulta $g_m = 19mA/V$, $g_{m5} = 38mA/V$, $r_{be5} = 2.6k\Omega$. Il guadagno di tensione vale dunque:

$$\frac{v_u}{v_d} = \frac{g_m r_{be5} g_{m5} R_L}{(1 + sC_1 r_{be5})(1 + sC_2 R_L)} = \frac{2.8 \cdot 10^4}{(1 + \frac{s}{5.10^6})(1 + \frac{s}{2.10^7})}$$

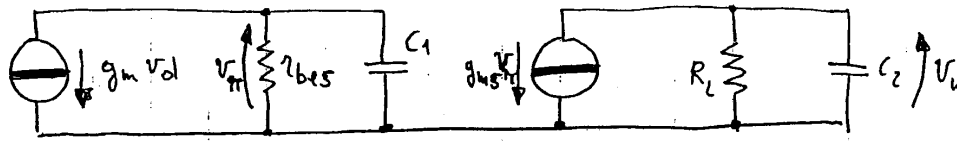


FIGURA 2.51. Il circuito per piccoli segnali ulteriormente semplificato.

Si supponga poi che, per effetto di altre capacità non modellate, sia presente un terzo polo reale negativo alla frequenza angolare di 10^8 rad/s . Il diagramma di Bode del guadagno completo,

$$\frac{v_u}{v_d} = \frac{2.8 \cdot 10^4}{\left(1 + \frac{s}{\omega_{p1}}\right)\left(1 + \frac{s}{\omega_{p2}}\right)\left(1 + \frac{s}{\omega_{p3}}\right)},$$

dove $\omega_{p1} = 5 \cdot 10^6 \text{ rad/s}$, $\omega_{p2} = 2 \cdot 10^7 \text{ rad/s}$ e $\omega_{p3} = 10^8 \text{ rad/s}$, è rappresentato in fig. 2.52).

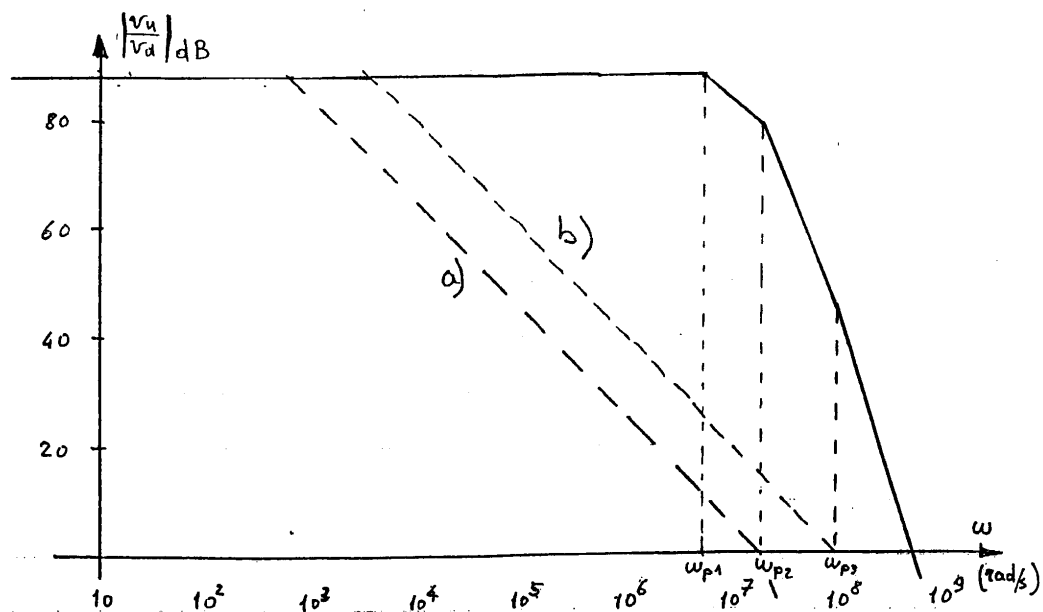


FIGURA 2.52. La risposta in frequenza dell' amplificatore.

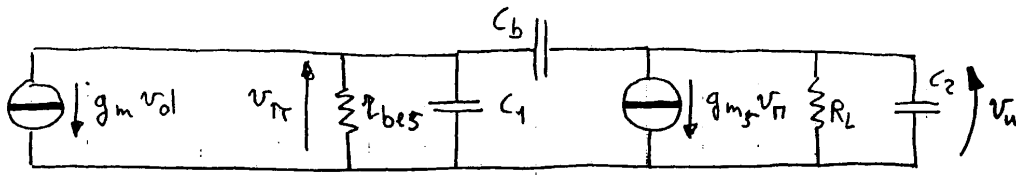
Si vuol rendere stabile l' amplificatore anche quando è retroazionato a guadagno unitario.

Una prima possibilità è quella di spostare a sinistra il polo dominante, posto alla frequenza ω_{p1} , facendo sì che il guadagno scenda a -20 dB/decade fino a 0 dB , dove si incontra il polo a ω_{p2} . Per far questo basta inserire tra i nodi A e B in fig. 2.49) una capacità di valore tale che risulti $\omega'_{p1} = \omega_{p2}/(2.8 \cdot 10^4) = 704 \text{ rad/s}$. Il risultato è illustrato dalla curva a) in fig. 2.52); occorre scegliere C_a in modo che

$$\omega'_{p1} = \frac{1}{(C_1 + C_a)r_{be5}} = 704 \text{ rad/s},$$

cioè $C_a = 0.55 \mu\text{F}$. Una capacità così elevata non è integrabile, e comunque, come si vede in fig. 2.52), il guadagno incomincia a calare intorno a 100 Hz , con ovvio peggioramento della desensibilizzazione.

Vediamo invece cosa succede inserendo una capacità C_b tra i nodi A e C in fig. 2.49): il circuito equivalente è mostrato in fig. 2.53). Possiamo scrivere

FIGURA 2.53. Il circuito equivalente con C_b .

$$v_u = -\frac{R_L}{1 + sC_2R_L} (g_{m5}v_\pi + sC_bv_u - sC_bv_\pi)$$

$$v_\pi = \frac{r_{be5}}{1 + sC_1r_{be5}} (-g_m v_d - sC_bv_\pi + sC_bv_u)$$

da cui, con qualche passaggio

$$\frac{v_u}{v_d} =$$

$$= \frac{g_m g_{m5} r_{be5} R_L (1 - s \frac{C_b}{g_{m5}})}{1 + s[C_b(R_L + r_{be5} + r_{be5} g_{m5} R_L) + C_1 r_{be5} + C_2 R_L] + s^2 [(C_b + C_2)(C_b + C_1) - C_b^2] r_{be5} R_L}$$

Ponendo il denominatore nella forma

$$\left(1 + \frac{s}{\omega_1}\right) \left(1 + \frac{s}{\omega_2}\right) = 1 + s \left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2}\right) + \frac{s^2}{\omega_1 \omega_2} \simeq 1 + \frac{s}{\omega_1} + \frac{s^2}{\omega_1 \omega_2},$$

l' approssimazione essendo valida se $\omega_1 \ll \omega_2$, il coefficiente del termine di primo grado al denominatore può essere identificato con $1/\omega_1$, e pertanto:

$$\omega_1 \simeq [C_b(R_L + r_{be5} + r_{be5} g_{m5} R_L) + C_1 r_{be5} + C_2 R_L]^{-1} \simeq [\beta_0 C_b R_L]^{-1}$$

$$\omega_2 \simeq \frac{g_{m5}}{C_1 + C_2 + C_1 C_2 / C_b}$$

Appare evidente dalle formule che ω_1 cala al crescere di C_b , mentre ω_2 cresce. Se $C_b \gg C_2$, $\omega_2 \simeq g_{m5}/(C_1 + C_2)$: nel nostro caso, ω_2 tenderebbe a 5.10^8 rad/s , e si sposterebbe addirittura a destra del terzo polo a $-\omega_{p3}$, corrispondente a 10^8 rad/s .

Allora è sufficiente dimensionare C_b in modo che $\omega_1 = \omega_{p3}/2.810^4 = 35 \text{ krad/s}$,

$$C_b = (\beta_0 R_L \omega_1)^{-1} = 19 \text{ pF}$$

e verificare, come accade nel nostro caso, che il valore trovato sia molto maggiore del valore di C_2 . Si noti che integrare una capacità di questo valore è abbastanza facile. E' poi opportuno, viste le numerose approssimazioni fatte, fare una verifica numerica con le formule complete.

Concludendo, l' effetto di C_b è quello di spostare il polo corrispondente a ω_{p1} a sinistra, e quello corrispondente a ω_{p2} a destra, fino addirittura a scavalcare ω_{p3} . Si parla di *effetto di separazione dei poli* o *pole splitting*. La situazione è illustrata dalla curva b) in fig. 2.52): il vantaggio conseguito è evidente. Si noti infine che si son fatte varie ipotesi discutibili sul circuito di fig. 2.49), solo allo scopo di rendere relativamente semplici i calcoli.

2.6. Ancora sui comportamenti non ideali degli amplificatori operazionali.

Come si è visto nella sezione 2.3.2), un amplificatore operazionale si collega di solito al mondo esterno tramite i cinque morsetti evidenziati in fig. 2.54). Solitamente, per la descrizione del funzionamento, anzichè utilizzare le due tensioni d' ingresso V^+ e V^- , si utilizzano

- la tensione d' ingresso di modo comune $V_c = (V^+ + V^-)/2$ e
- la tensione d' ingresso di modo differenziale $V_d = V^+ - V^-$,

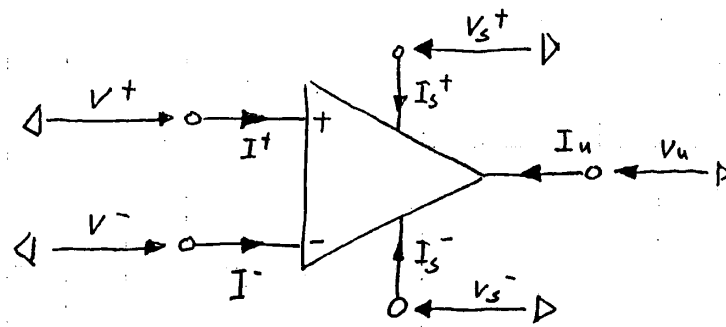


FIGURA 2.54. L' operazionale come componente a 5 morsetti.

come mostrato in fig. 2.55). Occorre tenere presente che il circuito, per grandi segnali, si com-

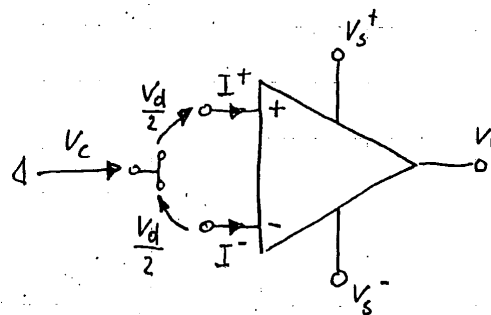


FIGURA 2.55. Le componenti di modo comune e di modo differenziale delle tensioni d' ingresso.

porta in modo non lineare. Solitamente è conveniente darne una rappresentazione ibrida del tipo:

$$\begin{aligned}
 I^+ &= I^+(V_d, V_c, V_s^+, V_s^-, I_u) \\
 I^- &= I^-(V_d, V_c, V_s^+, V_s^-, I_u) \\
 I_s^+ &= I_s^+(V_d, V_c, V_s^+, V_s^-, I_u) \\
 I_s^- &= I_s^-(V_d, V_c, V_s^+, V_s^-, I_u) \\
 V_u &= V_u(V_d, V_c, V_s^+, V_s^-, I_u)
 \end{aligned}
 \tag{2.15}$$

cui faremo riferimento per ricavare diversi parametri caratteristici di un amplificatore operazionale.

Scelto un punto di riposo $P_0 \equiv \{V_{d0}, V_{c0}, I_0^+, I_0^-, V_{s0}^+, V_{s0}^-, I_{s0}^+, I_{s0}^-, V_{u0}, I_{u0}\}$ che soddisfi le equazioni 2.15), e limitandosi a considerare piccole variazioni delle grandezze nell' intorno del punto di riposo stesso, è possibile linearizzare le equazioni 2.15) come segue.

Si prenda ad esempio la prima equazione. Per definizione di punto di riposo risulta

$$I_0^+ = I^+(V_{d0}, V_{c0}, V_{s0}^+, V_{s0}^-, I_{u0}) .$$

Ma, arrestando lo sviluppo in serie di Taylor al primo ordine,

$$\begin{aligned}
 &I^+(V_{d0} + v_d, V_{c0} + v_c, V_{s0}^+ + v_s^+, V_{s0}^- + v_s^-, I_{u0} + i_u) \simeq \\
 &\simeq I^+(V_{d0}, V_{c0}, V_{s0}^+, V_{s0}^-, I_{u0}) + \frac{\partial I^+}{\partial V_d} \Big|_{P_0} v_d + \frac{\partial I^+}{\partial V_c} \Big|_{P_0} v_c + \dots + \frac{\partial I^+}{\partial I_u} \Big|_{P_0} i_u .
 \end{aligned}$$

Segue che

$$I^+(V_{d0} + v_d, V_{c0} + v_c, V_{s0}^+ + v_s^+, V_{s0}^- + v_s^-, I_{u0} + i_u) - I_0^+ =$$

$$= i^+ \simeq \frac{\partial I^+}{\partial V_d} \Big|_{P0} v_d + \frac{\partial I^+}{\partial V_c} \Big|_{P0} v_c + \dots + \frac{\partial I^+}{\partial I_u} \Big|_{P0} i_u. \quad (2.16)$$

Osservando che i coefficienti degli incrementi v_c, v_d, \dots nella equazione 2.16) sono delle costanti reali, dipendenti dal punto di riposo, si capisce che le equazioni non lineari 2.15), per piccoli incrementi (piccoli segnali) si riducono al sistema lineare

$$\begin{aligned} i^+ &= h_{11}v_d + h_{12}v_c + h_{13}v_s^+ + h_{14}v_s^- + h_{15}i_u \\ i^- &= \dots \dots \dots \\ i_s^+ &= \dots \dots \dots \\ i_s^- &= \dots \dots \dots \\ v_u &= h_{51}v_d + h_{52}v_c + h_{53}v_s^+ + h_{54}v_s^- + h_{55}i_u \end{aligned} \quad (2.17)$$

Occorre a questo punto ricordare che si desidererebbe che l' amplificatore si comportasse come un amplificatore differenziale con elevato guadagno di tensione, elevata resistenza d' ingresso e bassa resistenza d' uscita. Si deve quindi individuare, sulla base delle 2.15), una regione di buon funzionamento dell' amplificatore.

2.6.1. La regione di funzionamento quasi-lineare. Le figure che seguono mostrano, in maniera del tutto qualitativa e senza rispettare le scale, una possibile dipendenza della tensione di uscita V_u da V_d, V_s^+, V_s^-, V_c ed I_u . Servirebbero analoghe caratteristiche per I^+, I^-, I_s^+ ed I_s^- , ma le considerazioni più interessanti si possono sviluppare con riferimento alla quinta delle equazioni 2.15). Ricordiamo innanzitutto che le caratteristiche ottenute per simulazione, supponendo isoterma il circuito, son diverse da quelle che si potrebbero ottenere con una misura di tipo statico per effetto di un notevole fenomeno di *retroazione termica*, che può perfino portare a cambiare il segno del guadagno differenziale nella regione ad alto guadagno.

Osserviamo poi che $V_u = 0$ per $V_d \neq 0$. Questo è dovuto sia alla non simmetria dello schema dello stadio differenziale d' ingresso dell' amplificatore, (fig. 2.31), sia al fatto che i transistori impiegati hanno inevitabilmente parametri diversi dai parametri nominali sui quali è basato il progetto, e son pertanto diversi l' uno dall' altro anche se nominalmente uguali.

Prende il nome di **tensione di offset** V_{os} dell' operazionale la tensione differenziale che occorre applicare all' ingresso per avere tensione d' uscita nulla quando la corrente di uscita è nulla (come si verifica, per esempio, se l' uscita è collegata a massa con una resistenza). È evidente che, affinché l' operazionale possa lavorare nella regione ad elevato guadagno, la tensione differenziale d' ingresso V_d deve essere prossima a V_{os} . Si osservi infine che V_{os} , dipendendo dalla dispersione dei parametri degli elementi di circuito, può venir considerata come una variabile aleatoria.

Dal circuito di fig. 2.31) risulta poi che la tensione di modo comune in ingresso, V_c , non può salire oltre $V_s^+ - 2V_\gamma$ senza che i BJT 1,2 e 5 escano dalla regione attiva diretta, ne' può scendere sotto $V_s^- + 2V_\gamma$ a causa dei BJT 6 e 7,1 e 2.

Analogamente la tensione d' uscita non può salire oltre $V_s^+ - 2V_\gamma$ (BJT 8 e 10) ne' scendere sotto $V_s^- + 2V_\gamma$ (BJT 9 e 7). Se questi vincoli sono rispettati, tutti i BJT lavorano in regione attiva diretta e ci si può aspettare un elevato guadagno di tensione.

Riassumendo, affinché l' operazionale abbia un comportamento abbastanza prossimo all' ideale deve essere:

- $|V_d - V_{os}|$ piccolo (μV o decine di μV);
- $V_s^- + 2V_\gamma < V_c < V_s^+ - 2V_\gamma$;
- $V_s^- + 2V_\gamma < V_u < V_s^+ - 2V_\gamma$.

Schemi o tecnologie diverse possono portare a limiti diversi, ma resta pur sempre vero che $|V_d - V_{os}|$ deve essere piccolo, e che sia V_c che V_u non debbono avvicinarsi troppo alle tensioni di alimentazione.

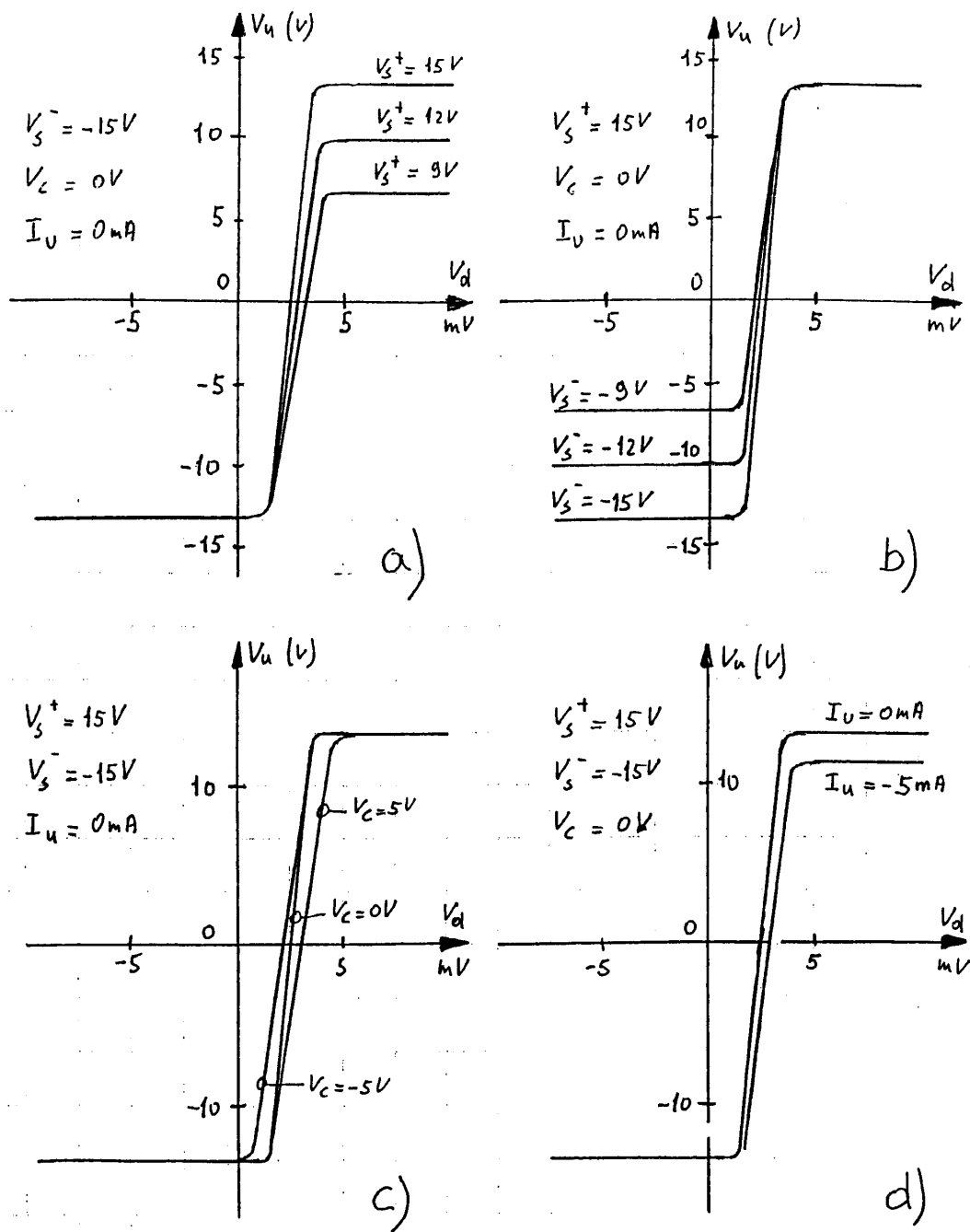


FIGURA 2.56. Dipendenza della tensione di uscita da V_d e da a) V_s^+ , b) V_s^- , c) V_c , d) I_u .

2.6.2. Specifiche statiche degli amplificatori operazionali. Si è appena ricordato che la *tensione di offset* V_{os} è la tensione differenziale che occorre applicare all'ingresso per avere tensione d'uscita nulla quando la corrente di uscita è nulla.

Dall'ultima delle equazioni 2.15),

$$0 = V_u(V_{os}, V_c, V_s^+, V_s^-, 0),$$

relazione che implicitamente lega V_{os} alle altre tre variabili

$$V_{os} = V_{os}(V_c, V_s^+, V_s^-) \tag{2.18}$$

È bene ricordare che la tensione di offset, fissate che siano le condizioni di misura, cioè V_c , V_s^+ e V_s^- , è una variabile aleatoria, e risulta diversa da una realizzazione all'altra del medesimo amplificatore operazionale. Solitamente il valor medio di V_{os} è trascurabile, ed il costruttore specifica come tensione di offset un certo numero di deviazioni standard di V_{os} , $k\sigma_{V_{os}}$, in funzione della resa di produzione che intende ottenere dal circuito. Se k è alto (4 o più) si può essere praticamente sicuri che il valore specificato non verrà (quasi) mai superato, ma l'amplificatore verrà pagato poco. Se si sceglie un k più basso, per garantire il valore di offset specificato il costruttore dovrà collaudare tutti i dispositivi, scartando quelli con offset più elevato: i costi ovviamente crescono rapidamente. Valori tipici di V_{os} , per amplificatori a basso costo, sono dell'ordine di diversi mV .

Dai grafici qualitativi di fig. 2.56) è evidente che, nella zona di funzionamento quasi lineare, $V_u = A_d(V_d - V_{os})$ essendo A_d una costante, il *guadagno differenziale*, che verrà definita rigorosamente più avanti. Nel'analisi dei circuiti usa pertanto rappresentare l'amplificatore affetto da offset, fig. 2.57a), come un amplificatore privo di offset con un generatore di tensione pari a V_{os} in serie ad uno dei morsetti d'ingresso, come in fig. 2.57b). Si noti che non è rilevante

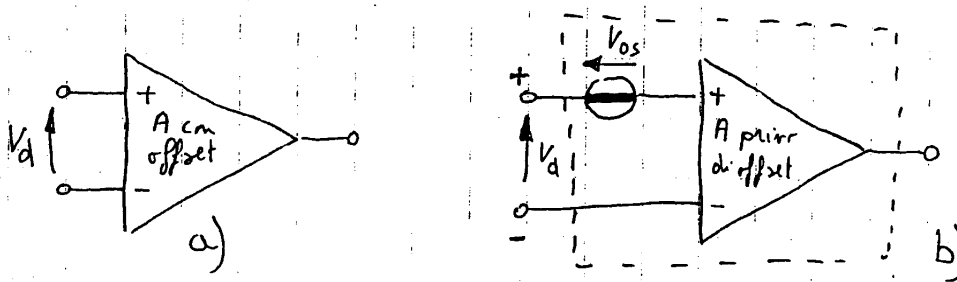


FIGURA 2.57. a) L'amplificatore con offset, b) sua rappresentazione come amplificatore ideale con generatore di tensione di offset in serie ad uno dei morsetti d'ingresso.

il verso attribuito a V_{os} , essendo V_{os} una variabile aleatoria a valor medio circa nullo.

La **corrente di polarizzazione d'ingresso** I_{bias} (*input bias current*) viene definita come media delle due correnti d'ingresso quando $V_d = V_{os}$ e $I_u = 0$ (amplificatore bilanciato), mentre la **corrente di offset** I_{os} (*input offset current*) è la differenza delle due medesime correnti.

In formule

$$I_{bias} = \frac{1}{2} (I^+(V_{os}, V_c, V_s^+, V_s^-, 0) + I^-(V_{os}, V_c, V_s^+, V_s^-, 0)) \quad (2.19)$$

$$I_{os} = I^+(V_{os}, V_c, V_s^+, V_s^-, 0) - I^-(V_{os}, V_c, V_s^+, V_s^-, 0) \quad (2.20)$$

Ricordando che V_{os} è funzione di V_c , V_s^+ e V_s^- , risulta che anche I_{bias} e I_{os} sono funzioni delle medesime variabili.

In realtà I_{bias} e I_{os} sono variabili aleatorie: la prima con valor medio sensibile, la seconda con valor medio praticamente nullo. Della prima si specifica il valor medio (valore tipico) o un campo di variazione; della seconda la deviazione standard o un suo multiplo $k\sigma_{I_{os}}$.

Valori tipici di I_{bias} vanno da 10 a 100 nA per stadi d'ingresso a BJT, da 1 a 10 pA per ingresso a JFET; $k\sigma_{I_{os}}$ corrisponde ad una frazione di I_{bias} che può andare dal 5% nel caso dei BJT al 40% nel caso dei JFET.

Quando l'amplificatore è bilanciato ($V_u = 0$, $I_u = 0$, $V_d = V_{os}$), la corrente assorbita dal morsetto non invertente vale $I^+ = I_{bias} + I_{os}/2$, mentre dal morsetto invertente viene assorbita la corrente $I^- = I_{bias} - I_{os}/2$.

Per studiare il funzionamento di un circuito che comprende un amplificatore operazionale che lavora in regione quasi lineare, usa linearizzarne il comportamento nell' intorno di un punto di riposo che corrisponde a $V_d = V_{os}$, ad una $V_c = V_{c0}$ assegnata (di solito $0V$) ed ai valori tipici delle tensioni di alimentazione ($V_s^+ = V_{s0}^+$, $V_s^- = V_{s0}^-$ supponendo inoltre che sia $I_u = 0$; V_u sarà di conseguenza $= 0V$ per definizione di V_{os}).

La situazione di riposo in corrispondenza della quale vengono valutati i parametri per piccoli segnali di un amplificatore operazionale è illustrata in fig. 2.58).

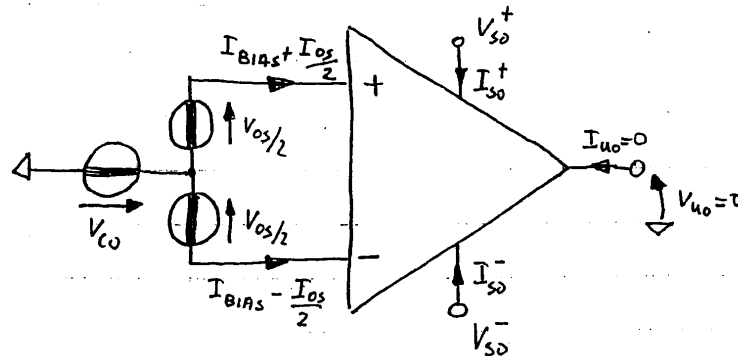


FIGURA 2.58. La situazione di riposo in corrispondenza della quale sono valutati i parametri per piccoli segnali di un amplificatore operazionale.

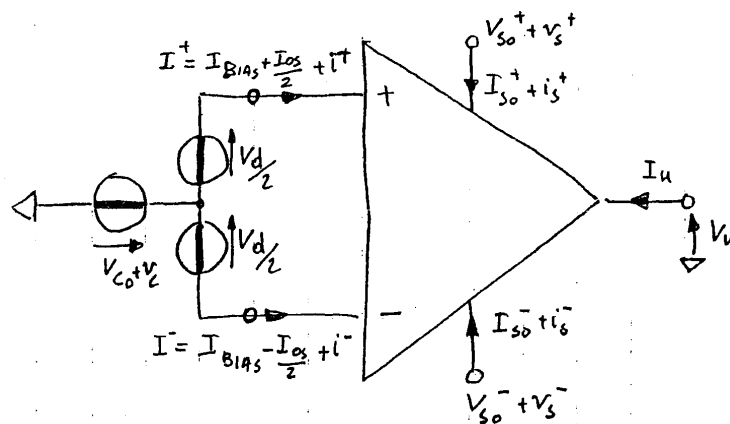


FIGURA 2.59. Piccoli scostamenti dal punto di riposo: sono messi in evidenza gli incrementi.

Se ora ci si allontana da questa situazione, evidenziando gli incrementi

$$\begin{aligned}
 v_d &= V_d - V_{os} & i^+ &= I^+ - (I_{bias} + I_{os}/2) \\
 v_c &= V_c - V_{c0} & i^- &= I^- - (I_{bias} - I_{os}/2) \\
 v_s^+ &= V_s^+ - V_{s0}^+ & i_s^+ &= I_s^+ - I_{s0}^+ \\
 v_s^- &= V_s^- - V_{s0}^- & i_s^- &= I_s^- - I_{s0}^- \\
 v_u &= I_u - 0 & v_u &= V_u - 0,
 \end{aligned}
 \tag{2.21}$$

ci si riporta nella situazione di fig. 2.59).

Inserendo i generatori di tensione e di corrente indicati in fig. 2.60), è possibile mettere in evidenza il blocco lineare corrispondente alle equazioni 2.17). Tutto ciò che è racchiuso dai cinque morsetti evidenziati in fig. 2.60) è un circuito equivalente dell' amplificatore operazionale che descrive il funzionamento che si può osservare nell' intorno del punto di riposo

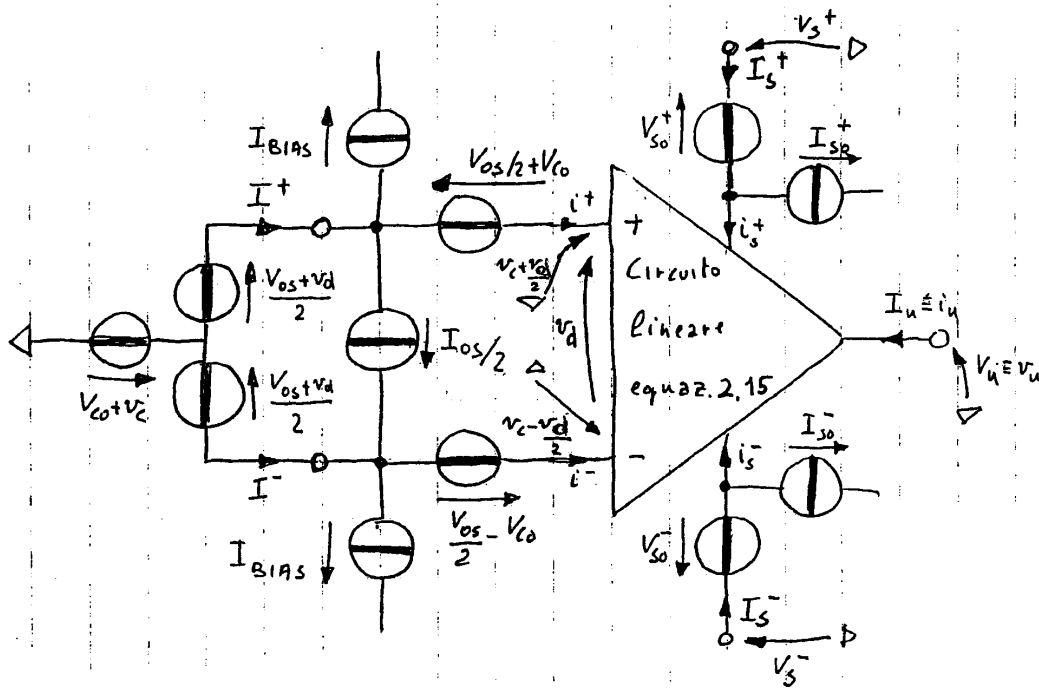


FIGURA 2.60. Si pone in evidenza il circuito retto dalle equazioni 2.16).

$P_0 = \{V_{os}, V_{c0}, V_{s0}^+, V_{s0}^-, 0\}$ con un' approssimazione che corrisponde ad un sviluppo in serie di Taylor arrestato al primo ordine.

Del circuito lineare descritto dalle equazioni 2.17) si dà poi solitamente una rappresentazione semplificata. Posto $i_d = i^+ - i^-$, $i_c = (i^+ + i^-)/2$, la situazione delle correnti all' in-

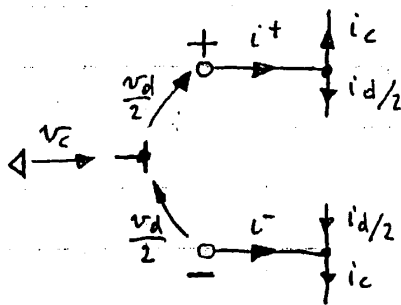


FIGURA 2.61. Situazione delle correnti d' ingresso.

gresso può infatti essere schematizzata come in fig. 2.61), essendo $i^+ = i_c + i_d/2$, $i^- = i_c - i_d/2$.

Definendo **resistenza d' ingresso di modo comune** il rapporto

$$R_c = \frac{v_c}{i_c} = \frac{2v_c}{i^+ + i^-} = \frac{2}{h_{12} + h_{22}} = \frac{2}{\frac{\partial I^+}{\partial V_c}|_{P_0} + \frac{\partial I^-}{\partial V_c}|_{P_0}} \tag{2.22}$$

e come **resistenza d' ingresso di modo differenziale** il rapporto

$$R_d = \frac{v_d}{i_d/2} = \frac{2v_d}{i^+ - i^-} = \frac{2}{h_{11} - h_{21}} = \frac{2}{\frac{\partial I^+}{\partial V_d}|_{P_0} - \frac{\partial I^-}{\partial V_d}|_{P_0}} \tag{2.23}$$

ci si può ricondurre allo schema d' ingresso di fig. 2.62), qualora sia rilevante solo la dipendenza di I^+ e I^- da V_c e V_d . In effetti, come si può anche dedurre dallo schema di principio di

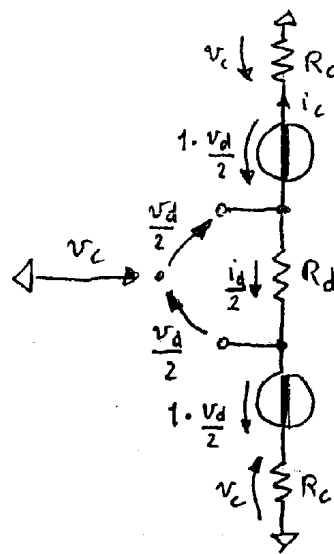


FIGURA 2.62. Circuito equivalente dell' ingresso.

fig. 2.31), I^+ ed I^- sono poco influenzate da V_s^+ e V_s^- , grazie alla presenza del generatore di coda della coppia differenziale e grazie alla ridotta entità dei disturbi su V_s^+ e V_s^- in confronto ai valori di V_c che ci si può aspettare nel normale funzionamento. Nell' uso poi lo schema di fig. 2.62) viene ulteriormente semplificato, cortocircuitando i due generatori di tensione comandati, che portano effetti trascurabili. Valori tipici, per operazionali di basso costo, sono $R_d = 1M\Omega$, $R_c = 1000M\Omega$. Si noti che, nella maggior parte dei casi pratici, è più importante R_c di R_d . Se ad esempio si considera l' inseguitore di fig. 2.63a) e lo si schematizza come in fig. 2.63b), è facile rendersi conto che R_d viene moltiplicata per il guadagno differenziale A_d dell' operazionale, per cui la resistenza differenziale d' ingresso R_{IN} è sostanzialmente uguale a R_c .

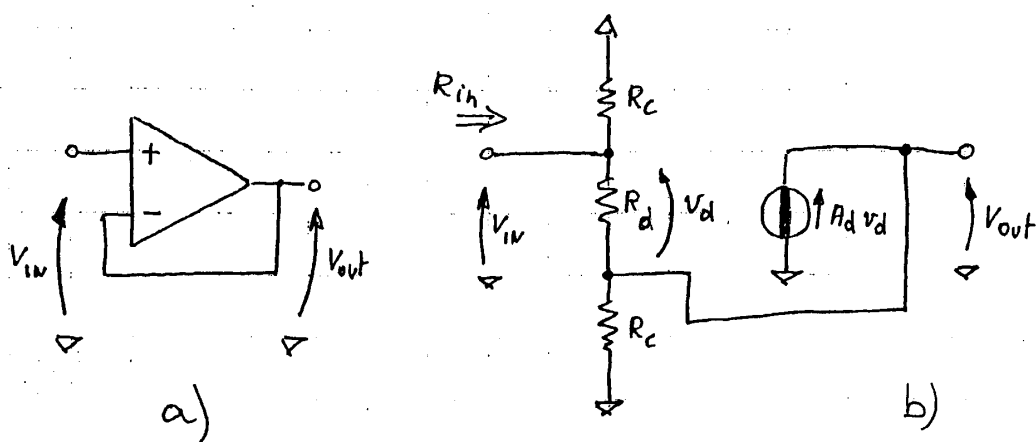


FIGURA 2.63. a) Inseguitore, b) circuito per il calcolo della resistenza d' ingresso.

Oltre ai due ingressi di segnale si considera poi solo l' equazione d' uscita

$$v_u = h_{51}v_d + h_{52}v_c + h_{53}v_s^+ + h_{54}v_s^- + h_{55}i_u .$$

I primi quattro parametri h sono dei guadagni di tensione, e precisamente

- $A_d = h_{51} = \frac{\partial V_u}{\partial V_d} |_{P_0}$ **guadagno di tensione di modo differenziale** (tipicamente da 10^4 a 10^6);
- $A_c = h_{52} = \frac{\partial V_u}{\partial V_c} |_{P_0}$ **guadagno di tensione di modo comune** (tipicamente da 10^{-1} a 10);
- $A_s^+ = h_{53} = \frac{\partial V_u}{\partial V_s^+} |_{P_0}$ **guadagno rispetto all'alimentazione positiva** (valori intorno a 1);
- $A_s^- = h_{54} = \frac{\partial V_u}{\partial V_s^-} |_{P_0}$ **guadagno rispetto all'alimentazione negativa** (idem).

L'ultimo, h_{55} , ha le dimensioni di una resistenza e prende il nome di **resistenza d'uscita**, ed ha tipicamente valori intorno a 100Ω :

- $R_o = h_{55} = \frac{\partial V_u}{\partial I_u} |_{P_0}$

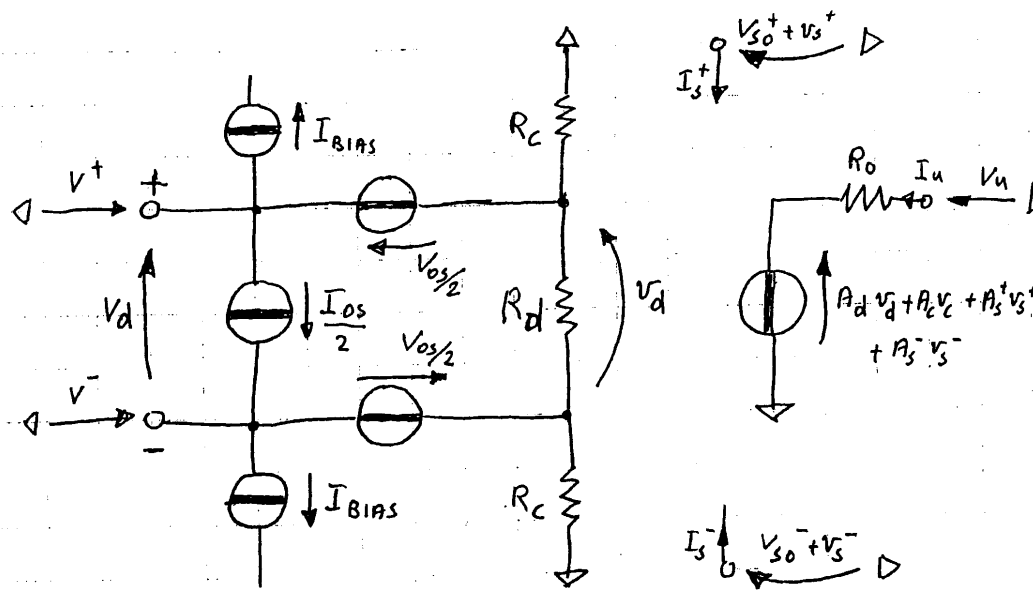


FIGURA 2.64. Circuito equivalente per polarizzazione e piccoli segnali.

Considerando che le specifiche sono normalmente fornite dal costruttore per $V_{c0} = 0$, che di solito non interessa un'analisi precisa per quanto riguarda I_s^+ ed I_s^- , trascurando pertanto i generatori comandati in fig. 2.62) e ricordando infine le varie definizioni introdotte, si perviene a descrivere l'amplificatore operazionale con il circuito equivalente di fig. 2.64), valido nell'intorno del punto di riposo $P_0 = \{V_{os}, 0, V_{s0}^+, V_{s0}^-, 0\}$.

Si noti che il circuito tiene conto sia delle correnti e delle tensioni di riposo, sia delle variazioni provocate dal segnale d'ingresso, e che tutti i parametri che in esso compaiono sono desumibili dalle specifiche del costruttore.

In molte applicazioni in cui si può applicare il principio del cortocircuito virtuale ($v_d \simeq 0$) e le alimentazioni sono ben stabili ci si può accontentare del circuito di fig. 2.65). In realtà, anzichè specificare il guadagno di modo comune A_c , i costruttori specificano solitamente il **fattore di reiezione di modo comune** o **CMRR - common mode rejection ratio** -:

- $CMRR = \frac{A_d}{A_c} = \frac{h_{51}}{h_{52}}$

Il CMRR è legato alla tensione di offset come segue. Dall'equazione che definisce V_{os} ,

$$0 = V_u(V_{os}, V_c, V_s^+, V_s^-, 0)$$

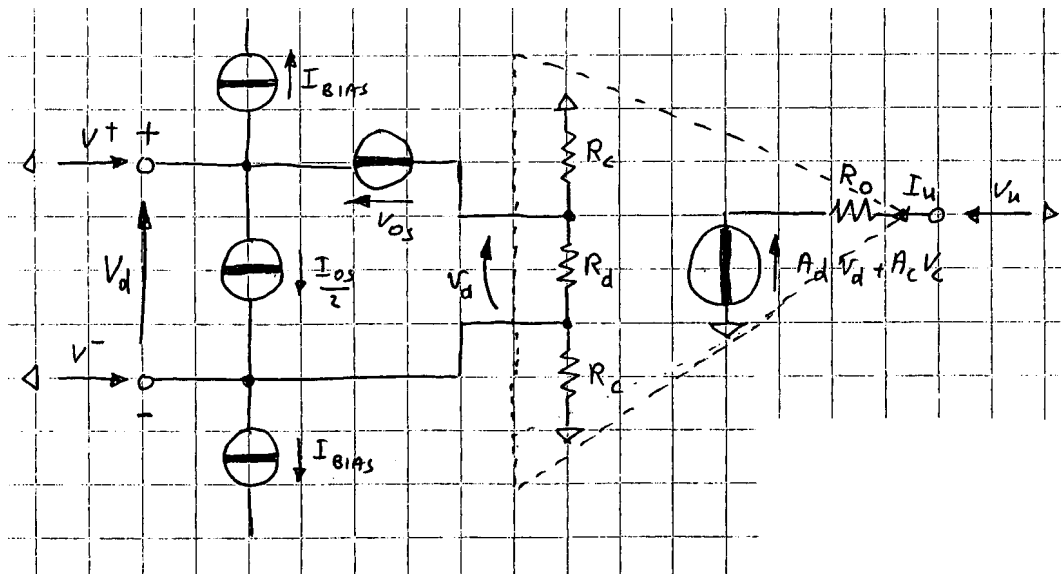


FIGURA 2.65. Circuito equivalente ulteriormente semplificato.

derivando ambo i membri, per V_s^+ e V_s^- costanti

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d}{dV_c} [V_u(V_{os}, V_c, V_s^+, V_s^-, 0)] = \\
 &= \frac{\partial V_u(V_{os}, V_c, V_s^+, V_s^-, 0)}{\partial V_{os}} \Big|_{V_c=const} \frac{\partial V_{os}}{\partial V_c} + \frac{\partial V_u(V_{os}, V_c, V_s^+, V_s^-, 0)}{\partial V_c} \Big|_{V_{os}=const} \\
 &= A_d \frac{\partial V_{os}}{\partial V_c} + A_c .
 \end{aligned}$$

Segue che

$$CMRR = - \left(\frac{\partial V_{os}}{\partial V_c} \right)^{-1} . \quad (2.24)$$

Se la tensione di offset cambia molto al cambiare della tensione di modo comune, il CMRR è basso. L'equazione appena vista è alla base di una semplice tecnica per la misura del CMRR. Tipicamente il CMRR ha valori nel campo $A_d - 20dB \sim A_d + 20dB$.

In modo del tutto analogo, anzichè specificare i guadagni rispetto alle alimentazioni, usa specificare il **fattore di reiezione della tensione di alimentazione PSRR** - power supply rejection ratio - come segue:

- $PSRR^+ = \frac{A_d}{A_s^+} = - \left(\frac{\partial V_{os}}{\partial V_s^+} \right)^{-1} e$
- $PSRR^- = \frac{A_d}{A_s^-} = - \left(\frac{\partial V_{os}}{\partial V_s^-} \right)^{-1} .$

Tipicamente le PSRR sono paragonabili al CMRR; al crescere della frequenza la reiezione di una delle alimentazioni cala, di solito, più rapidamente dell'altra (effetto della capacità di compensazione).

2.6.3. Specifiche dinamiche degli amplificatori operazionali. Il costruttore normalmente garantisce il comportamento in frequenza del guadagno differenziale $|A_d(\omega)|$. Solitamente il primo polo della risposta in frequenza si trova in corrispondenza di frequenze molto basse, decine o centinaia di Hz. Più significativa, per gli amplificatori internamente compensati, quelli cioè il cui guadagno cala a $-20dB/decade$ sino a ridursi all'unità, è la **frequenza di transizione** (prodotto guadagno-larghezza di banda) cioè la frequenza per cui $|A_d| = 1$. Per misurarla si

può montare un circuito di prova del tipo di fig. 2.66): il condensatore C , alla frequenza che

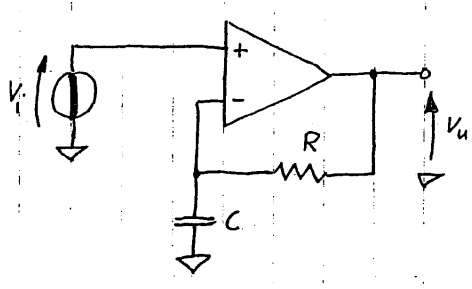


FIGURA 2.66. Misura del prodotto guadagno-larghezza di banda.

interessa, si comporta come un cortocircuito, aprendo la retroazione. La presenza di R consente peraltro di evitare che la tensione di uscita saturi per effetto di V_{os} .

Molto importante, nelle applicazioni, è un parametro che definisce una condizione dinamica di funzionamento marcatamente non-lineare. Si tratta dello *slew-rate* o *velocità di ricircolazione*. Lo *slew-rate* S è definito come il massimo valore possibile del modulo della velocità di variazione della tensione di uscita:

$$\bullet S = \left| \frac{dV_u}{dt} \right|_{MAX}$$

Per un sistema lineare non esiste alcun limite per la velocità di variazione della grandezza d'uscita misurata in risposta ad uno stimolo d'ingresso. Basta considerare, per esempio, la risposta al gradino di un sistema del primo ordine come quello di fig. 2.67): raddoppiando

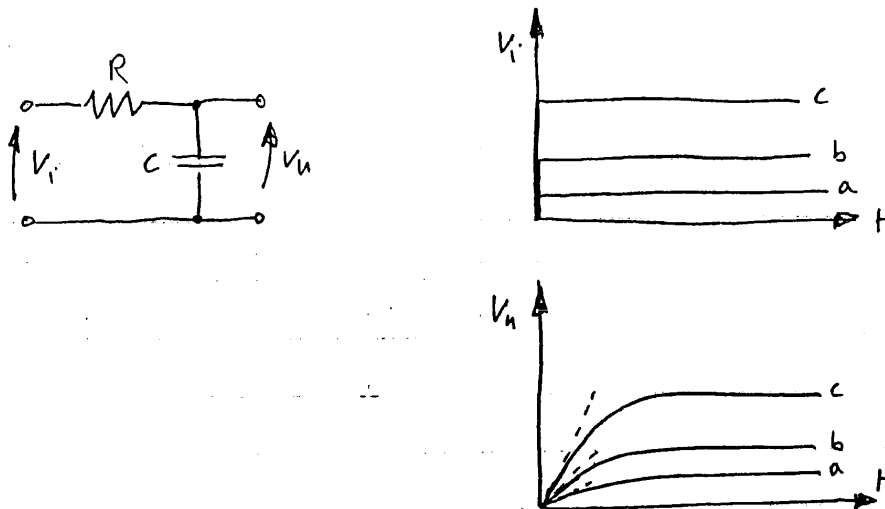


FIGURA 2.67. Risposta al gradino di un filtro passa-basso RC.

l'ampiezza del gradino d'ingresso, l'uscita raddoppia, e la pendenza pure raddoppia, senza limite.

In un amplificatore operazionale la situazione è più complessa, e la studiamo nel caso di un amplificatore compensato. Con riferimento alla figura 2.31), lo stadio di uscita (BJT 8 e 9) ha un guadagno di tensione unitario, e la limitazione su dV_u/dt nasce dal fatto che la tensione sul collettore di BJT7 non può variare più rapidamente di tanto. In effetti, la tensione sul nodo B è circa pari a $V_s^- + 2V_\gamma$. La massima velocità di variazione della tensione del collettore di BJT7 è determinata dal valore della massima corrente disponibile per caricare C . Esaminando

lo stadio di ingresso ci si rende conto che, grazie all'effetto dello specchio di corrente BJT 3-4, la massima corrente disponibile è $2I_0$. Segue che

$$S = \left| \frac{dV_u}{dt} \right|_{MAX} \simeq \frac{2I_0}{C}. \quad (2.25)$$

La fig. 2.68) mostra la risposta ad un gradino di tensione di un inseguitore a guadagno unitario realizzato con un operazionale compensato. L'instaurarsi della limitazione di slew-rate

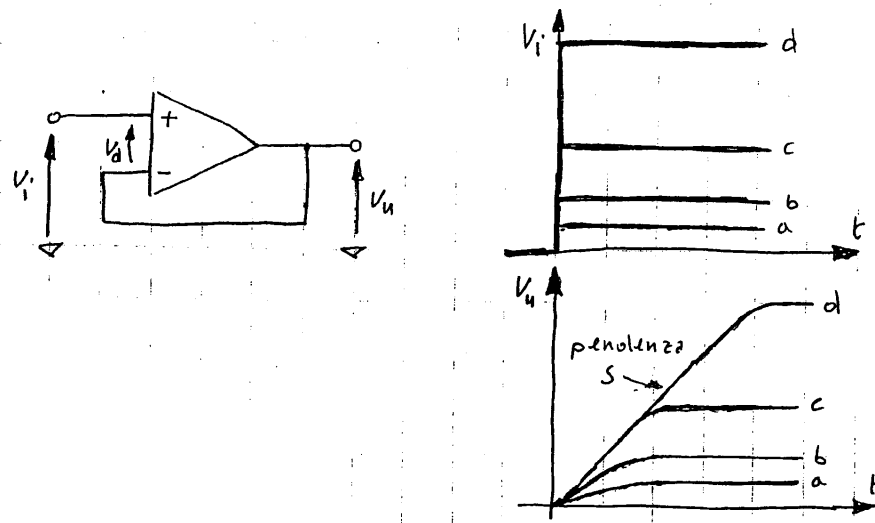


FIGURA 2.68. Risposta al gradino di un inseguitore a guadagno unitario.

corrisponde al raggiungere, all'ingresso dell'operazionale, una tensione differenziale di tre o quattro unità termiche, sufficienti a deviare completamente sul BJT 1 o sul BJT 2 la corrente di coda $2I_0$.

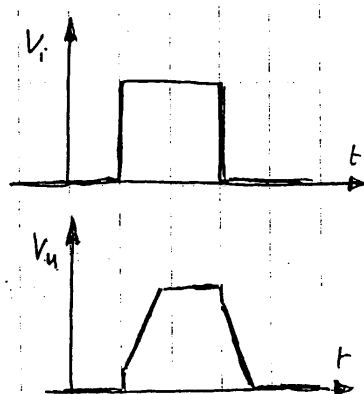


FIGURA 2.69. Risposta ad un impulso rettangolare di un inseguitore a guadagno unitario.

La risposta del medesimo circuito di fig. 2.68) ad un impulso rettangolare è illustrata in fig. 2.69); le piccole discontinuità evidenziate nella risposta sono legate ad effetti di secondo ordine.

In caso di ingresso sinusoidale, l'uscita del circuito di fig. 2.68) risulterà non distorta solo se, detto $V_i(t) = V_M \cos \omega t$ il segnale d'ingresso, che dovrebbe essere circa uguale a quello d'

uscita $V_u(t)$, risulta

$$\left| \frac{dV_i}{dt} \right|_{MAX} = \omega V_M < S.$$

Per un valore tipico di S , $1V/\mu s$ e $V_M = 10V$ questo comporta

$$f < \frac{S}{2\pi V_M} = 15.9kHz. \quad (2.26)$$

Il valore di frequenza così trovato, calcolato in corrispondenza di un livello convenzionale del segnale d'uscita, definisce la **larghezza di banda a piena potenza** dell'amplificatore. Come si vede, si tratta di una limitazione forte, tanto più rilevante quanto più grande è V_M . Se la condizione sopra riportata non è soddisfatta, il segnale di uscita verrà distorto come mostrato in fig. 2.70).

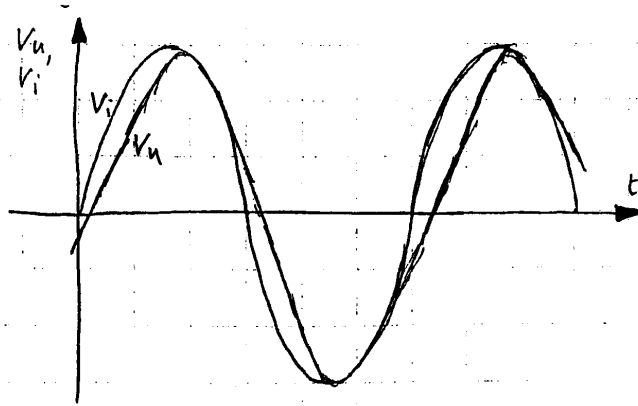


FIGURA 2.70. Distorsione di un segnale sinusoidale per effetto della limitazione di slew rate.

2.6.4. Riduzione dell'effetto delle correnti di polarizzazione, importanza del CMRR.

Calcoliamo l'effetto della tensione di offset e delle correnti di polarizzazione e di offset su un amplificatore invertente. Come si vedrà, per minimizzare gli effetti indesiderati conviene inserire tra il morsetto non invertente e massa una resistenza R_3 di valore pari a $R_1 \parallel R_2$, come è mostrato in fig. 2.71). In fig. 2.71a) è rappresentato lo schema del circuito, utilizzando per l'operazionale una versione semplificata del circuito equivalente di fig. 2.65). Volendo poi applicare il principio del cortocircuito virtuale, si ritiene infinito il guadagno di tensione e si trascurano le resistenze d'ingresso e di uscita, riducendosi così alla rappresentazione di fig. 2.71b), in cui i morsetti di ingresso dell'*amplificatore ideale* vanno trattati come se appunto fossero virtualmente in cortocircuito. Applicando il principio della sovrapposizione degli effetti

$$V_u = -\frac{R_2}{R_1}V_i + V_{os}\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) - R_3I_{bias}\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) + R_2I_{bias} - \frac{I_{os}}{2}\left(R_2 + R_3 + \frac{R_2R_3}{R_1}\right).$$

Ponendo $R_3 = R_1 \parallel R_2$

$$V_u = -\frac{R_2}{R_1}V_i + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)V_{os} - R_2I_{os} :$$

la tensione di uscita dipende solo da I_{os} , che tipicamente è molto minore di I_{bias} negli operazionali con stadio d'ingresso a BJT.

Prendiamo ora in esame un integratore invertente, per verificare l'utilità di inserire un'opportuna resistenza tra il morsetto dell'ingresso non invertente e massa. Nel circuito equivalente di fig. 2.72) si sono utilizzati due generatori di corrente di polarizzazione, di valore

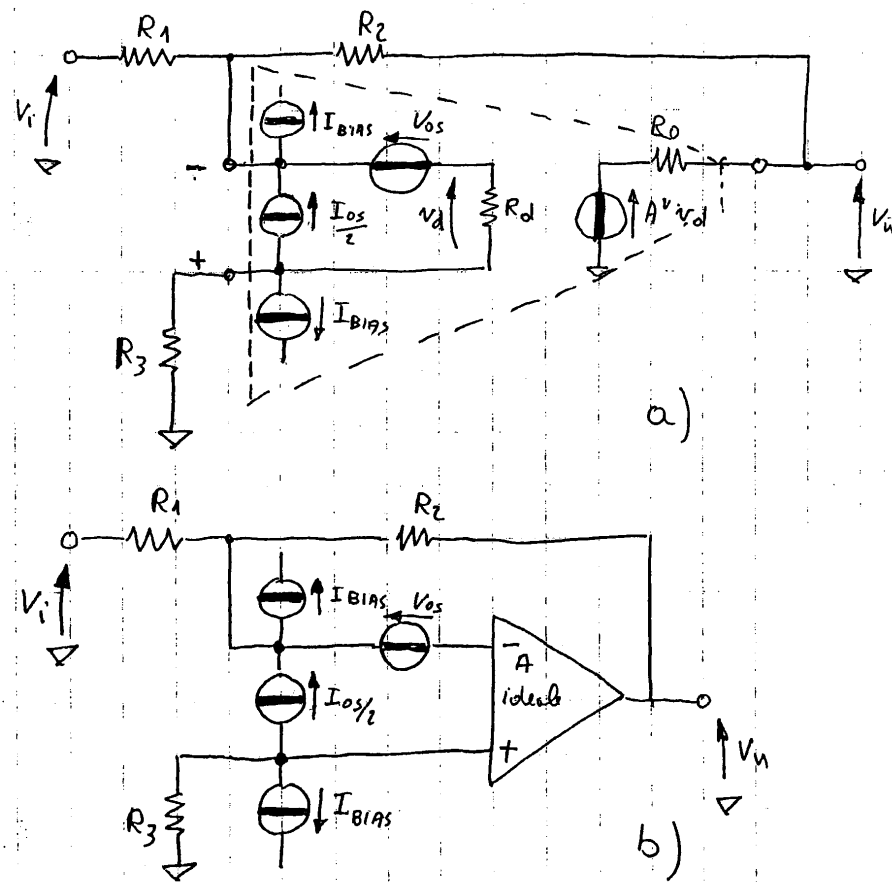


FIGURA 2.71. Effetti di V_{os} , I_{bias} e I_{os} su un amplificatore invertente: a) schema più completo, b) schema semplificato.

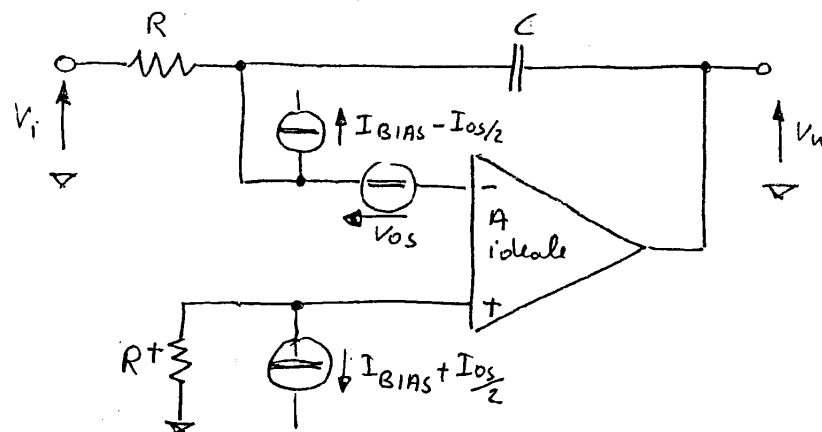


FIGURA 2.72. Effetti di V_{os} , I_{bias} e I_{os} su un integratore invertente.

$I_{bias} + I_{os}/2$ e $I_{bias} - I_{os}/2$, anzichè i tre dell' esempio precedente. Applichiamo ancora i principi del cortocircuito virtuale e della sovrapposizione degli effetti:

$$V_u(t) = V_u(0) - \frac{1}{RC} \int_0^t V_i(\tau) d\tau + \frac{1}{C} (I_{bias} - I_{os}/2)t - \frac{R^+}{RC} (I_{bias} + I_{os}/2)t + \frac{V_{os}}{RC}t .$$

Scegliendo $R^+ = R$

$$V_u(t) = V_u(0) - \frac{1}{RC} \int_0^t V_i(\tau) d\tau - \frac{I_{os}t}{C} + \frac{V_{os}t}{RC}.$$

Ancora una volta, si ha vantaggio se $I_{bias} \gg I_{os}$.

Valutiamo infine l' errore dovuto al CMRR finito nei due semplici casi di un amplificatore invertente con guadagno $-R_2/R_1$ e di un amplificatore non invertente con guadagno $1+R_2/R_1$. Si consideri l' operazionale ideale sotto tutti gli aspetti tranne che per l' avere guadagno differenziale A_d e guadagno di modo comune A_c finiti. Con qualche passaggio si trova, per l' amplificatore invertente,

$$\frac{V_u}{V_i} = -\frac{R_2}{R_1} \left[1 - \frac{1}{1 + A_d \left(1 - \frac{1}{2CMRR}\right) \frac{R_1}{R_1+R_2}} \right],$$

mentre per l' amplificatore non invertente si trova

$$\frac{V_u}{V_i} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \left[1 + \frac{\frac{A_d}{CMRR} - \frac{R_1+R_2}{R_1}}{A_d \left(1 - \frac{1}{2CMRR}\right) + \frac{R_1+R_2}{R_1}} \right].$$

Per avere un basso errore, con l' amplificatore invertente, è sufficiente avere A_d elevato, qualunque sia il CMRR. Per l' amplificatore non invertente questo non basta, occorre anche che il CMRR sia elevato. La cosa non stupisce: la tensione di modo comune, nell' amplificatore invertente, è la metà della tensione differenziale all' ingresso dell' operazionale, ed è trascurabile. Nell' amplificatore non invertente invece è circa pari alla tensione che rappresenta il segnale d'ingresso, ed è rilevante: per questo occorre una buona reiezione del modo comune se si vuole che il guadagno dipenda solo da R_2 ed R_1 .

Bibliografia

- [1] L.O. Chua, C.A. Desoer, E.S. Kuh: *Linear and non-linear circuits*, Mc Graw Hill, New York, 1987, ISBN 0-07-010898-6.
- [2] P.U. Calzolari, S. Graffi: *Elementi di Elettronica*, Zanichelli, 1984.

